

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ στο ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ

I.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής δικαιολογώντας συγχρόνως την απάντησή σας.

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$. Α Ψ

Αιτιολόγηση: Αν $f(0) = f(1)$, τότε από το θεώρημα Rolle, θα υπήρχε ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$ και θα είχαμε ΑΤΟΠΟ, αφού $f'(x) \neq 0, \forall x \in (0,1)$.

2. Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\beta) < f(\alpha)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) < 0$. Α Ψ

Αιτιολόγηση: Για την f , από το θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού

(Θ.Μ.Τ.), υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ και επειδή

$f(\beta) < f(\alpha) \Rightarrow f(\beta) - f(\alpha) < 0$ ενώ $\beta - \alpha > 0$, θα έχουμε $f'(x_0) < 0$.

Σχόλιο: Για να δείξουμε, ότι γνωρίζουμε τις «ελάχιστες απαιτήσεις» που θέτει το Θ.Μ.Τ. «για να μας επιτρέψει» να βγάλουμε τα συμπεράσματά του, θα έπρεπε να πούμε: Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ επομένως είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) και επομένως από το Θ.Μ.Τ. προκύπτει ότι

3. Αν οι f, g είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $[\alpha, \beta]$, με $f(\alpha) = g(\alpha)$ και $f(\beta) = g(\beta)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε στα σημεία $A(x_0, f(x_0))$ και $B(x_0, g(x_0))$ οι εφαπτόμενες να είναι παράλληλες. Α Ψ

Αιτιολόγηση: Η συνάρτηση $h = f - g$ είναι προφανώς συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ (ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων), παραγωγίσιμη στο (α, β) (ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων), και επειδή $h(\alpha) = 0 = h(\beta)^*$, από το θεώρημα Rolle, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $h'(x_0) = 0$. Όμως, $0 = h'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$ επομένως $f'(x_0) = g'(x_0)$ και συνεπώς οι εφαπτόμενες στα σημεία $A(x_0, f(x_0))$ και $B(x_0, g(x_0))$ θα είναι παράλληλες, αφού θα έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης.

* $f(\alpha) = g(\alpha) \Rightarrow h(\alpha) = f(\alpha) - g(\alpha) = 0$ και $f(\beta) = g(\beta) \Rightarrow h(\beta) = f(\beta) - g(\beta) = 0$

4. Αν $f'(x) = (x-1)^2(x-2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

α) το $f(1)$ είναι τοπικό μέγιστο της f

Α

Ψ

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$\searrow$	T.E.	$\nearrow$

Αιτιολόγηση: Προφανώς η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,2)$ και η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(0,1) \cup (1,2)$ και συνεπώς το $f(1)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο.

β) το $f(2)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f A Ψ

Αιτιολόγηση: Προφανώς η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1,3)$, $f'(x) < 0$ στο $(1,2)$ και $f'(x) > 0$ στο $(2,3)$ και συνεπώς το $f(2)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

5. α) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης άρτιου βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη. A Ψ

Αιτιολόγηση: Η παράγωγός της, θα είναι πολυωνυμική περιττού βαθμού, επομένως θα έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα* και συνεπώς θα υπάρχει οριζόντια εφαπτομένη.

* (1) Αν $f(x) = \alpha_{2v+1}x^{2v+1} + \dots + \alpha_0$, $v \in \mathbb{N}$ (πολυωνυμική περιττού βαθμού), τότε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\alpha_{2v+1}x^{2v+1} + \dots + \alpha_0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\alpha_{2v+1}x^{2v+1}) = -\infty, \text{ (αν } \alpha_{2v+1} > 0 \text{)} \text{ και}$$

επομένως θα υπάρχει «κοντά στο $-\infty$ » x_1 τέτοιο, ώστε $f(x_1) < 0$, επίσης επειδή

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha_{2v+1}x^{2v+1} + \dots + \alpha_0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha_{2v+1}x^{2v+1}) = +\infty, \text{ (αν } \alpha_{2v+1} > 0 \text{)} \text{ θα}$$

υπάρχει «κοντά στο $+\infty$ » x_2 τέτοιο, ώστε $f(x_2) > 0$. Έτσι όμως για την f στο $[x_1, x_2]$ υπάρχουν οι απαιτήσεις του θεωρήματος Bolzano, και συνεπώς θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (x_1, x_2)$ με $f(x_0) = 0$. (Ομοίως για $\alpha_{2v+1} < 0$)

(2) Υπάρχει επιχείρημα «εκτός ύλης»: Στις πολυωνυμικές εξισώσεις με πραγματικούς συντελεστές, το πλήθος των ριζών στο $\mathbb{C}$ είναι όσο και ο βαθμός τους και οι μη πραγματικές ρίζες είναι συζυγείς ανά δύο και συνεπώς στις περιττού βαθμού πάντα υπάρχει μία τουλάχιστον πραγματική.

β) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη. A Ψ

Αιτιολόγηση: (1) Για παράδειγμα η $f(x) = x$ έχει $f'(x) = 1 \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(2) Η παράγωγός της, θα είναι άρτιου βαθμού, επομένως δεν θα έχει πάντοτε πραγματική ρίζα και συνεπώς δεν θα υπάρχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

6. Η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + bx^2 + \gamma x + \delta$ με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$ έχει πάντα ένα σημείο καμπής. A Ψ

Αιτιολόγηση: Η δεύτερη παράγωγος $f''(x) = 6ax + 2\beta$, είναι πρώτου βαθμού, επομένως έχει μία ακριβώς πραγματική ρίζα και επειδή αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν αυτής της ρίζας, θα υπάρχει πάντα ένα σημείο καμπής.

7. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν στο x_0 σημείο καμπής, τότε και η $h = f \cdot g$ έχει στο x_0 σημείο καμπής. A Ψ

Αιτιολόγηση: Αν $f(x) = g(x) = x^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$ τότε έχουμε σημείο καμπής στο $x_0 = 0$.

Η $h(x) = f(x) \cdot g(x) = x^6$ δεν έχει σημείο καμπής στο $x_0 = 0$.

Σχόλιο: Η εμπειρία μας από πολυωνυμικές συναρτήσεις όπως $\varphi(x) = x^v$, $v \geq 2$, όπου με περιττό εκθέτη έχουμε σημείο καμπής στο $x_0 = 0$, ενώ με άρτιο εκθέτη έχουμε ακρότατο, μας βοήθησε να αντιληφθούμε εύκολα, ότι υπάρχει άπειρο πλήθος «αντιπαραδειγμάτων» που μας δίνει το δικαίωμα να χαρακτηρίσουμε ψευδή τον ισχυρισμό.

Το κοινό χαρακτηριστικό στα άπειρα «αντιπαραδείγματα μας», είναι το κοινό σημείο καμπής $O(0,0)$, με συναρτήσεις που αλλάζουν πρόσημο στο $x_0 = 0$ και δίνουν συναρτήσεις γινόμενο που δεν αλλάζουν πρόσημο στο $x_0 = 0$. Έτσι, έχουμε άπειρες εκδοχές «του ίδιου αντιπαραδείγματος» και η παραδοχή αυτή μπορεί να μας γλυτώσει από την επιπολαιότητα να πούμε «ποτέ», μέσω της «ατελούς επαγωγής» των άπειρων αντιπαραδειγμάτων.

Πιο ακίνδυνο, θα ήταν να διερευνήσουμε το θέμα, μέσα από τη μεγάλη οικογένεια των δυο φορές παραγωγίσιμων συναρτήσεων, όπου θα βλέπαμε ότι δεν αρκεί να μηδενίζονται οι δεύτερες παράγωγοι των f, g για να μηδενιστεί η $(f \cdot g)''$.

$$(f \cdot g)'' = (f' \cdot g + f \cdot g')' = f'' \cdot g + 2f' \cdot g' + f \cdot g''$$

Τέλος, για να μη κάνουμε την επιπολαιότητα αρνούμενοι το «πάντα» να πούμε «ποτέ»:
Οι $f(x) = x^3$ και $g(x) = x^3 + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ έχουν σημείο καμπής στο $x_0 = 0$.

Η $h(x) = f(x) \cdot g(x) = x^3(x^3 + 1)$ έχει επίσης σημείο καμπής στο $x_0 = 0$.

8. Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της C_f του οποίου η απόσταση από τον άξονα $x'x$ είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια. A Ψ

Αιτιολόγηση: Στην περίπτωσή μας, η απόσταση από τον άξονα $x'x$ είναι το $f(x_0)$, άρα μέγιστο (ή ελάχιστο) είναι το $f(x_0)$, συνεπώς $f'(x_0) = 0$ και επομένως σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.

9. Η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$\alpha) f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$

A



Αιτιολόγηση: $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x - 2$ και επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 2) = -1.$$

$$\beta) g(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)^2}$$

A



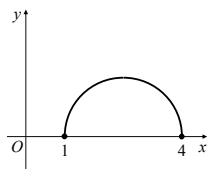
Αιτιολόγηση: $g(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)^2} = \frac{x-2}{x-1}$ και επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[(x-2) \frac{1}{x-1} \right] \stackrel{\text{«}(-1)(-\infty)\text{»}}{=} +\infty$$

Σχόλιο: Κάναμε επίδειξη καλής γνώσης της θεωρίας, θεωρώντας ότι αρκεί που το $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty$ για να είναι η ευθεία $x = 1$, κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g .

«Για την ιστορία»: $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(x-2) \frac{1}{x-1} \right] \stackrel{\text{«}(-1)(+\infty)\text{»}}{=} -\infty$

10. Αν γραφική παράσταση της συνάρτησης f δίνεται από το παρακάτω σχήμα, τότε:



i) το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f'}$ είναι το $(1, 4)$

A ☒ Ψ

ii) το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f'}$ είναι το $[1, 4]$

A ☒ Ψ

iii) $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, 4)$

A ☒ Ψ

iv) υπάρχει $x_0 \in (1, 4) : f'(x_0) = 0$.

☒ Α Ψ

Αιτιολόγηση: Η γραφική παράσταση της f , παραπέμπει σε συνάρτηση συνεχή στο $[1, 4]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 4)$ και με $f(1) = 0 = f(4)$. Για μια τέτοια συνάρτηση, από το θεώρημα Rolle, υπάρχει $x_0 \in (1, 4) : f'(x_0) = 0$.

11. Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$ έχει:

α) μια, τουλάχιστον, ρίζα στο $(0, 1)$

A ☒ Ψ

β) μια, ακριβώς, ρίζα στο $(-1, 0)$

☒ Α Ψ

γ) τρεις πραγματικές ρίζες

A ☒ Ψ

Αιτιολόγηση: $f'(x) = (x^3 + x + 1)' = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα, και σε συνδυασμό με το θεώρημα Bolzano, αφού $f(-1) \cdot f(0) = (-1) \cdot 1 = -1 < 0$, προκύπτει ότι η f έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα, που βρίσκεται στο $(-1, 0)$.

12. Αν για τις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g ισχύουν

$$f(0) = 4, f'(0) = 3, f'(5) = 6, g(0) = 5, g'(0) = 1, g'(4) = 2, \text{ τότε}$$

$$(f \circ g)'(0) = (g \circ f)'(0) \quad \text{ ☒ Α Ψ }$$

Αιτιολόγηση: $(f \circ g)'(0) = f'(g(0)) \cdot g'(0) = f'(5) \cdot 1 = 6 \cdot 1 = 6$

$$\text{και } (g \circ f)'(0) = g'(f(0)) \cdot f'(0) = g'(4) \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6.$$

II.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση

1. Το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{6} + h\right) - \varepsilon\phi\frac{\pi}{6}}{h}$ ισούται με:

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

☒ B) $\frac{4}{3}$

Γ) $\sqrt{3}$

Δ) 0

Ε) $\frac{3}{4}$.

Αιτιολόγηση: Για $f(x) = \varepsilon\varphi x$, έχουμε:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6} + h\right) - \varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}}{h} = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}.$$

2. Το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$ ισούται με:

A) $\frac{1}{x^2}$ B) $-\frac{2}{x^2}$ **Γ)** $-\frac{1}{x^2}$ Δ) $-\frac{2}{x}$ Ε) 0

Αιτιολόγηση: Για $f(x) = \frac{1}{x}$, έχουμε: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

3. Αν $f(x) = 5^{3x}$ τότε η $f'(x)$ ισούται με:

A) $3x5^{3x-1}$ B) $\frac{5^{3x}}{3 \ln 5}$ Γ) $3 \cdot 5^{2x}$
Δ) $3 \cdot 5^{3x}$ **Ε)** $5^{3x} \ln 125$

Αιτιολόγηση: $f'(x) = (5^{3x})' = 5^{3x} \cdot \ln 5 \cdot (3x)' = 5^{3x} \cdot \ln 5 \cdot 3 = 5^{3x} \cdot \ln 5^3 = 5^{3x} \cdot \ln 125.$

4. Αν $f(x) = \sigma\upsilon\nu^3(x+1)$ τότε η $f'(\pi)$ ισούται με:

A) $3\sigma\upsilon\nu^3(\pi+1)\eta\mu(\pi+1)$ B) $3\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)$
Γ) $-3\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)\eta\mu(\pi+1)$ Δ) $3\pi\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)$

Αιτιολόγηση: $f'(x) = (\sigma\upsilon\nu^3(x+1))' = 3\sigma\upsilon\nu^2(x+1) \cdot (\sigma\upsilon\nu(x+1))' =$
 $= 3\sigma\upsilon\nu^2(x+1) \cdot (-\eta\mu(x+1)) \cdot (x+1)' = 3\sigma\upsilon\nu^2(x+1) \cdot (-\eta\mu(x+1)) = -3\sigma\upsilon\nu^2(x+1) \cdot \eta\mu(x+1)$

5. Αν $f(x) = (x^2 - 1)^3$ τότε η έβδομη παράγωγος αυτής στο 0 ισούται με:

A) 1 B) -1 **Γ)** 0
Δ) 27 Ε) δεν υπάρχει.

Αιτιολόγηση: Η f είναι πολυωνυμική έκτου βαθμού, επομένως η έκτη παράγωγος είναι πολυωνυμική μηδενικού βαθμού, δηλαδή σταθερή, και επομένως η έβδομη παράγωγος είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

6. Αν οι εφαπτόμενες των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$ και $g(x) = 2x^2$ στα σημεία με τετμημένη x_0 είναι παράλληλες, τότε το x_0 είναι:

A) 0 B) $\frac{1}{4}$ **Γ)** $\frac{1}{2}$ Δ) 1 Ε) 2.

Αιτιολόγηση: $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ και $g'(x) = (2x^2)' = 4x.$

Έτσι στο $(0, +\infty)$: $f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 4x \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

7. Αν $f(x) = e^{\beta x}$, $g(x) = e^{\alpha x}$ και $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε το β ως συνάρτηση του α ισούται με:

A) $\frac{\alpha-1}{\alpha^2}$

B) $\frac{\alpha^2}{\alpha+1}$

Γ) $\frac{\alpha+1}{\alpha^2}$

Δ) $\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}$

E) $\frac{\alpha^2}{\alpha-1}$.

Αιτιολόγηση: Προφανώς $\alpha \neq 0$, γιατί αλλιώς $g(x) = 1$ και $g'(x) = 0$.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)} \Leftrightarrow \left(\frac{e^{\beta x}}{e^{\alpha x}}\right)' = \frac{(e^{\beta x})'}{(e^{\alpha x})'} \Leftrightarrow (e^{\beta x - \alpha x})' = \frac{\beta e^{\beta x}}{\alpha e^{\alpha x}} \Leftrightarrow (\beta - \alpha)e^{\beta x - \alpha x} = \frac{\beta}{\alpha} e^{\beta x - \alpha x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta - \alpha = \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \beta\alpha - \alpha^2 = \beta \Leftrightarrow \beta\alpha - \beta = \alpha^2 \Leftrightarrow \beta(\alpha - 1) = \alpha^2 \stackrel{*}{\Leftrightarrow} \beta = \frac{\alpha^2}{\alpha - 1}$$

* $\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 1$, αφού $\beta(\alpha - 1) = \alpha^2$, και αν $\alpha = 1$ τότε $\alpha = 0$. (ΑΤΟΠΟ)

8. Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [-1, 1]$ και $f(0) = 0$, τότε:

A) $f(1) = -1$

B) $f(-1) > 0$

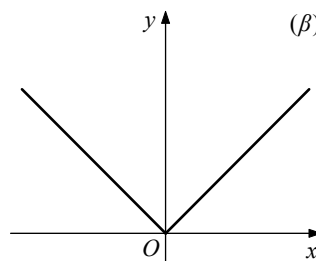
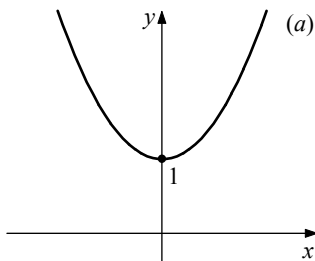
Γ) $f(1) > 0$

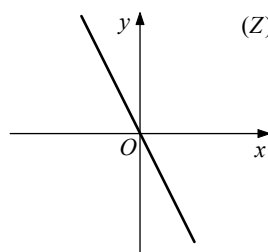
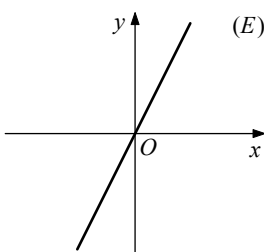
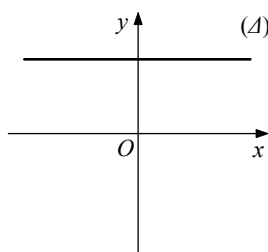
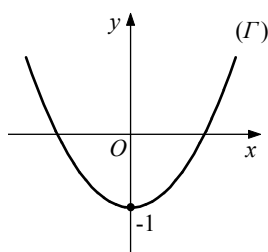
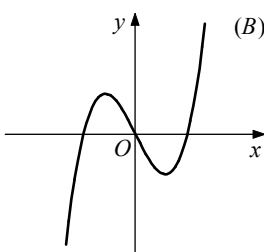
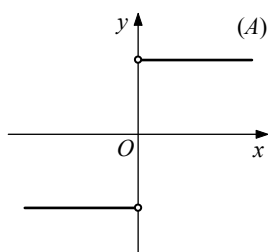
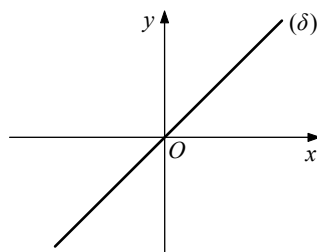
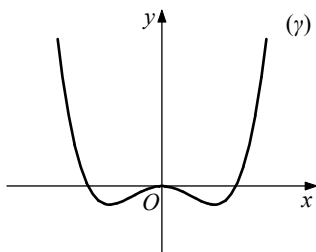
Δ) $f(-1) = 0$.

Αιτιολόγηση: Προφανώς f γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$ και επομένως $-1 < 0 < 1 \Rightarrow f(-1) < f(0) < f(1) \Rightarrow f(-1) < 0 < f(1)$.

III.

1. Να αντιστοιχίσετε καθεμιά από τις συναρτήσεις $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ σε εκείνη από τις συναρτήσεις A, B, Γ, Δ, E, Z που νομίζετε ότι είναι η παράγωγός της.





Αιτιολόγηση: $\alpha \rightarrow E$: Η α , παρουσιάζεται ως κυρτή και συνεπώς η παράγωγός της είναι γνησίως αύξουσα

$\beta \rightarrow A$: Η β , παρουσιάζεται ως συνάρτηση που δεν παραγωγίζεται στο 0.

$\gamma \rightarrow B$: Η γ , παρουσιάζεται ως συνάρτηση με τρία τοπικά ακρότατα σε εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της και κατά συνέπεια η παράγωγός της θα πρέπει να έχει τρεις τουλάχιστον ρίζες.

$\delta \rightarrow \Delta$: (1) Η δ , παρουσιάζεται ως γνησίως αύξουσα και επομένως η παράγωγός της δε μπορεί να είναι αρνητική.

(2) Η δ , παρουσιάζεται ως «γραμμική» και επομένως η παράγωγός της θα πρέπει να είναι σταθερή.

Σχόλιο: Προσπαθήσαμε να περιορίσουμε στο «ελάχιστο» την προσέγγιση που στηρίζεται στο «φαίνεται». Έτσι αφού η άσκηση «δήλωνε» ότι η λύση ήταν ανάμεσα στις προτεινόμενες, διαλέξαμε την πλέον ανώδυνη προσέγγιση, της εύρεσης λύσης μέσω του αποκλεισμού των απαράδεκτων περιπτώσεων, στηριζόμενοι στα «κραυγαλέα» χαρακτηριστικά του σχήματος.

Έτσι δε χρειάστηκε να μπούμε στον πειρασμό να πούμε, ότι η (α) είναι η

$$f(x) = x^2 + 1, \text{ με } f'(x) = 2x, \text{ η } (\beta) \text{ η } g(x) = |x|, \text{ με } g'(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } x < 0 \\ 1, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases},$$

$$\text{η } (\gamma) \text{ η } h(x) = x^4 - 4x^2, \text{ με } h'(x) = 4x^3 - 8x \text{ και η } (\delta) \text{ η } \varphi(x) = x, \text{ με } \varphi'(x) = 1.$$

2. Καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις να αντιστοιχίσετε στην ευθεία που είναι ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης στο $+\infty$.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ

1. $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$

A. $y = 2$

2. $f(x) = -x + 1 + \frac{1}{e^x}$

B. $y = x - 1$

3. $f(x) = 2 + \frac{3}{x-2}$

Γ. $y = -x + 1$

Δ. $y = x$

Ε. $y = -x$

Αιτιολόγηση: $1 \rightarrow \Delta: f(x) = x + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f(x) - x = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$2 \rightarrow \Gamma:$

$$f(x) = -x + 1 + \frac{1}{e^x} \Rightarrow f(x) - (-x + 1) = \frac{1}{e^x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$3 \rightarrow A: f(x) = 2 + \frac{3}{x-2} \Rightarrow f(x) - 2 = \frac{3}{x-2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x-2} = 0.$$

Σχόλια: (1) Στηριχθήκαμε στο δεδομένο, πως αν υπάρχει ασύμπτωτη στο $x_0 \in \mathbb{R}$ ή στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, τότε αυτή σε κάθε περίπτωση είναι μοναδική, αφού όταν υπάρχει ένα όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$ ή στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, τότε αυτό σε κάθε περίπτωση είναι μοναδικό.

Έτσι, παρατηρήσαμε τις συναρτήσεις, αναζητώντας αθροίσματα μιας «γραμμικής» και μιας συνάρτησης με όριο 0, στο $+\infty$. Ο ορισμός μας έδινε τη σιγουριά να προχωρήσουμε και οι παρατιθέμενες πιθανές λύσεις, την επιβεβαίωσαν.

(2) Στα σχόλια του σχολικού βιβλίου πρέπει να διορθώσουμε: «Οι ρητές συναρτήσεις

$\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του

παρονομαστή, δεν έχουν ασύμπτωτες της μορφής $y = \lambda x + \beta$.»

(3) Υπάρχουν «εκφυλισμένες» περιπτώσεις ασύμπτωτων.

π.χ.: Κάθε συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) έχει ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης την ευθεία $y = \alpha x + \beta$.

Η C_g , με $g(x) = \frac{\eta \mu x}{x}$, έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$ και $+\infty$, την $y = 0$.

Οι κατακόρυφες ασύμπτωτες, φαντάζουν σαν οι πιο συνεπείς με το όνομα περιπτώσεις. Η γνώση αυτή, δεν πρέπει «να ξεστρατίσει» τη σκέψη μας από τη σκοπιμότητα μελέτης των ασύμπτωτων, που δεν είναι άλλη, από την οριοθέτηση των γραφικών παραστάσεων για καλύτερο σχεδιασμό.

Πρόσθετη ερώτηση: Να χαρακτηρίσετε Α ή Ψ τον παρακάτω ισχυρισμό.

«Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(\alpha, \beta]$ και $[\beta, \gamma)$, τότε είναι παραγωγίσιμη και στο (α, γ) » Α Ψ

Αιτιολόγηση: Η $f(x) = |x|$ είναι παραγωγίσιμη στα $(-1, 0]$ και $[0, 1)$, αλλά όχι στο $(-1, 1)$. Δεν υπάρχει η $f'(0)$, αφού τα πλευρικά όρια είναι στο $\mathbb{R}$, αλλά διαφορετικά.