

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ στον ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ

I.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα A, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής δικαιολογώντας συγχρόνως την απάντησή σας.

1. Ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) + g(x))dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ A Ψ

Αιτιολόγηση: Θεώρημα για συνεχείς συναρτήσεις σε διάστημα $[a, b]$. (1^ο, σελίδα 332)

Σχόλιο: Απαντήσαμε με «ρίσκο», αφού θεωρήσαμε ότι εννοείται πως πρόκειται για συνεχείς συναρτήσεις σε διάστημα $[a, b]$. Θεωρήσαμε ότι οι ερωτήσεις A, Ψ σε θέματα θεωρίας, αναφέρονται ακριβώς στη θεωρία του σχολικού βιβλίου, χωρίς προεκτάσεις.

Πλήρης (ακραία) αιτιολόγηση: Αφού ζητείται να χαρακτηρίσουμε με A, Ψ, επομένως οι όροι της σχέσης ορίζονται, δηλαδή οι συναρτήσεις ορίζονται στα a, b και είναι συνεχείς στα διαστήματα που προκύπτουν.

a) Αν $a < b$, τότε η σχέση είναι αληθής.

Θεώρημα για συνεχείς συναρτήσεις σε διάστημα $[a, b]$.

b) Αν $a = b$, τότε η σχέση είναι αληθής, αφού οι συναρτήσεις ορίζονται στο a και

$$\int_a^a (f(x) + g(x))dx = 0 = 0 + 0 = \int_a^a f(x)dx + \int_a^a g(x)dx$$

c) Αν $a > b$, τότε η σχέση είναι αληθής, αφού οι συναρτήσεις είναι συνεχείς στο $[b, a]$ και από το

$$\begin{aligned} \text{σχετικό θεώρημα,} \quad \int_b^a (f(x) + g(x))dx &= \int_b^a f(x)dx + \int_b^a g(x)dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\int_a^b (f(x) + g(x))dx = -\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \end{aligned}$$

Σχόλιο: Το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού, αλλά και οι μέθοδοι ολοκλήρωσης, αναφέρονται σε συνεχείς συναρτήσεις σε διάστημα $[a, b]$.

2. Ισχύει $\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$ A Ψ

Αιτιολόγηση: Για τις συνεχείς συναρτήσεις $f(x) = g(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$:

$$\int_1^3 [f(x) \cdot g(x)]dx = \int_1^3 (1 \cdot 1)dx = \int_1^3 1dx = 1 \cdot (3 - 1) = 2$$

$$\text{ενώ} \quad \int_1^3 f(x)dx \cdot \int_1^3 g(x)dx = \int_1^3 1dx \cdot \int_1^3 1dx = \left(\int_1^3 1dx \right)^2 = [1 \cdot (3 - 1)]^2 = 4$$

Σχόλιο: Σκεφτήκαμε ότι αν ίσχυε, σαν εξίσου σημαντικό με την ιδιότητα του αθροίσματος θα υπήρχε στη θεωρία. Επίσης θα ίσχυε ότι και $\int_a^b f(x) \cdot g'(x)dx = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g'(x)dx$, συμπληρωματικά με τον τύπο «ολοκλήρωσης κατά παράγοντες».

Τέλος, για αντιπαράδειγμα σκεφτήκαμε την ειδική περίπτωση θετικών σταθερών συναρτήσεων στα εμβαδά, όπου προφανώς άλλο είναι να πολλαπλασιάζεις με το μήκος της βάσης του ορθογωνίου $(b - a)$ μια φορά και άλλο δύο.

3. Αν $\alpha = \beta$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$.



Ψ

Αιτιολόγηση: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$ (Ορισμός, για συναρτήσεις που ορίζονται στο α)

4. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.



Ψ

Αιτιολόγηση: Αν $f(x) = \eta \mu x$, τότε ενώ $f(x) \neq 0, \forall x \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ έχουμε ότι

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} \eta \mu x dx = [-\sigma \upsilon \nu x]_0^{2\pi} = (-\sigma \upsilon \nu 2\pi) - (-\sigma \upsilon \nu 0) = -1 - (-1) = 0$$

5. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$.



Ψ

Αιτιολόγηση: Συμπέρασμα από τους ορισμούς του εμβαδού και του ορισμένου ολοκληρώματος, εννοείται για συνεχείς συναρτήσεις.

6. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.



Ψ

Αιτιολόγηση: Αν $f(x) = \eta \mu x$, τότε ενώ $f(x) < 0, \forall x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ έχουμε ότι

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \eta \mu x dx = [-\sigma \upsilon \nu x]_0^{\frac{3\pi}{2}} = \left(-\sigma \upsilon \nu \frac{3\pi}{2}\right) - (-\sigma \upsilon \nu 0) = 0 - (-1) = 1$$

7. $\int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4 + 1)dx < \int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4 + x^2 + 1)dx$, για κάθε $\alpha > 0$.



Ψ

Αιτιολόγηση: Με δεδομένο ότι οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι συνεχείς.

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4 + 1)dx &< \int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4 + x^2 + 1)dx \Leftrightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4 + 1)dx < \int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4 + 1)dx + \int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 dx \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 &< \int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 dx \Leftrightarrow 0 < \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\alpha}^{\alpha} \Leftrightarrow 0 < \frac{\alpha^3}{3} - \frac{(-\alpha)^3}{3} \Leftrightarrow 0 < \frac{2\alpha^3}{3} \Leftrightarrow 0 < \alpha \end{aligned}$$

8. $\int_0^{\pi/4} \ln(1 - \eta \mu^2 x)dx = 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sigma \upsilon \nu x dx$.



Ψ

Αιτιολόγηση: $\int_0^{\pi/4} \ln(1 - \eta \mu^2 x)dx = \int_0^{\pi/4} \ln \sigma \upsilon \nu^2 x dx = \int_0^{\pi/4} 2 \ln \sigma \upsilon \nu x dx = 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sigma \upsilon \nu x dx$

9. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = [xf(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} xf'(x)dx$.



Ψ

Με δεδομένο ότι f, f' είναι συνεχείς συναρτήσεις σε διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Αιτιολόγηση: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} 1 \cdot f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} (x)' f(x)dx = [xf(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} xf'(x)dx$

10. $\int_1^e \ln x dx = \int_e^1 \ln \frac{1}{t} dt.$

A Ψ

Αιτιολόγηση: $\int_e^1 \ln \frac{1}{t} dt = \int_e^1 \ln t^{-1} dt = \int_e^1 (-1) \cdot \ln t dt = (-1) \cdot \int_e^1 \ln t dt = \int_1^e \ln t dt = \int_1^e \ln x dx$

Σχόλιο: Στο ορισμένο ολοκλήρωμα, μπορώ να αλλάζω όνομα μεταβλητής «κατά βούληση».

12. Αν $\int_a^\beta f(x) dx = 0$, τότε $f(\xi) = 0$ για κάποιο $\xi \in (\alpha, \beta)$.

A Ψ

Αιτιολόγηση: Θα εργαστούμε με τη μέθοδο «της απαγωγής σε άτοπο», για συνεχή συνάρτηση f σε διάστημα $[a, \beta]$.

Έστω ότι $f(x) \neq 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$. Τότε όμως, το θεώρημα Bolzano λειτουργεί απαγορευτικά στο να υπάρχουν ετερόσημες εικόνες στοιχείων του $[a, \beta]$. Έτσι: (α) $f(x) > 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$ και

$f(a) \geq 0, f(\beta) \geq 0$ με συνέπεια $\int_a^\beta f(x) dx > 0$ και επομένως ΑΤΟΠΟ ή

(β) $f(x) < 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$ και $f(a) \leq 0, f(\beta) \leq 0$ με συνέπεια $\int_a^\beta f(x) dx < 0$ και επομένως ΑΤΟΠΟ.

Άρα $f(\xi) = 0$ για κάποιο $\xi \in (\alpha, \beta)$.

Σχόλιο: Υπάρχει αιτιολόγηση πολύ «οικονομική», για όσους γνωρίζουν το Θ.Μ.Τ. του ολοκληρωτικού λογισμού (§3.6), που όμως είναι «εκτός ύλης».

13. Αν $\int_a^\beta f(x) dx = 0$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[a, \beta]$, τότε η f παίρνει δυο, τουλάχιστον, ετερόσημες τιμές.

A Ψ

Αιτιολόγηση: Θα εργαστούμε με τη μέθοδο «της απαγωγής σε άτοπο», για συνεχή συνάρτηση f σε διάστημα $[a, \beta]$.

Έστω ότι δεν υπάρχουν ετερόσημες εικόνες στοιχείων του $[a, \beta]$.

Έτσι: (α) $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, \beta]$ και υπάρχει $\xi \in [a, \beta]$ με $f(\xi) > 0$, (η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[a, \beta]$) με συνέπεια $\int_a^\beta f(x) dx > 0$ και επομένως ΑΤΟΠΟ ή

(β) $f(x) \leq 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$ και υπάρχει $\xi \in [a, \beta]$ με $f(\xi) < 0$, με συνέπεια $\int_a^\beta f(x) dx < 0$ και επομένως ΑΤΟΠΟ.

Άρα η f παίρνει δυο, τουλάχιστον, ετερόσημες τιμές.

14. Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 (x^3 - x) dx$ παριστάνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - x$ και τον άξονα των x .

A **Ψ**

Αιτιολόγηση: Θα παρίστανε εμβαδόν, αν $f(x) = x^3 - x \geq 0, \forall x \in [-1, 1]$,

όμως $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{8} < 0$.

II.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση

1. Αν $f'(x) = \eta\mu\pi x$ και $f(0) = 0$, τότε το $f(1)$ ισούται με

A) $-\frac{1}{\pi}$, B) $\frac{1}{\pi}$, Γ) $-\frac{2}{\pi}$, Δ) $\frac{2}{\pi}$.

Αιτιολόγηση: $f'(x) = \eta\mu\pi x \Rightarrow f'(x) = \left(-\frac{\sigma\upsilon\nu\pi x}{\pi}\right)' \Rightarrow f(x) = -\frac{\sigma\upsilon\nu\pi x}{\pi} + c$

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\sigma\upsilon\nu(\pi \cdot 0)}{\pi} + c = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\pi} + c = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1}{\pi},$$

$$\text{επομένως } f(x) = -\frac{\sigma\upsilon\nu\pi x}{\pi} + \frac{1}{\pi} \text{ και συνεπώς } f(1) = -\frac{\sigma\upsilon\nu\pi}{\pi} + \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

2. Οι παράγουσες της $f(x) = \frac{1}{4-x}$ στο $(4, +\infty)$ είναι

A) $G(x) = \ln(4-x) + c$,

B) $G(x) = -\ln(4-x) + c$,

Γ) $G(x) = \ln(x-4) + c$,

Δ) $G(x) = -\ln(x-4) + c, c \in \mathbb{R}$.

Αιτιολόγηση: Στο $(4, +\infty)$.

$$G'(x) = (-\ln(x-4) + c)' = (-\ln(x-4))' + (c)' = -\frac{1}{x-4} \cdot (x-4)' + 0 = \frac{1}{4-x} \cdot 1 = f(x)$$

Σχόλιο: Οι (Α), (Β) δεν ορίζονται στο $(4, +\infty)$, αφού $x \in (4, +\infty) \Rightarrow x > 4 \Rightarrow 4-x < 0$. Επίσης, η (Γ) δε διαθέτει το $(-)$ που θα ανατρέψει τη σειρά στη διαφορά $(x-4)$ και επομένως η (Δ) που επέμεινε είναι η λύση, «δια της αποκλίσεως των άλλων».

Αιτιολόγηση 2^η: Μια παράγουσα της f στο $(4, +\infty)$ είναι η $F(x) = \int_5^x \frac{1}{4-t} dt$.

$$\begin{aligned} \text{Για } x \in (4, 5): F(x) &= \int_5^x \frac{1}{4-t} dt = -\int_x^5 \frac{1}{4-t} dt = \int_x^5 \frac{(4-t)'}{4-t} dt \stackrel{u=4-t}{=} \int_{du=(4-t)'}^{u=4-x} \frac{1}{u} du = \\ &= -\int_{-1}^{4-x} \frac{1}{u} du = -[\ln|u|]_{-1}^{4-x} = -\ln|4-x| + \ln|-1| = -\ln(x-4) + \ln 1 = -\ln(x-4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Για } x \in (5, +\infty): F(x) &= \int_5^x \frac{1}{4-t} dt = -\int_x^5 \frac{(4-t)'}{4-t} dt \stackrel{u=4-t}{=} -\int_{du=(4-t)'}^{u=4-x} \frac{1}{u} du = \\ &= \int_{4-x}^{-1} \frac{1}{u} du = [\ln|u|]_{4-x}^{-1} = \ln|-1| - \ln|4-x| = \ln 1 - \ln(x-4) = -\ln(x-4) \end{aligned}$$

Επομένως, μία παράγουσα είναι η $F(x) = \int_5^x \frac{1}{4-t} dt = -\ln(x-4)$, αφού και για $x = 5$ έχουμε

$$F(5) = \int_5^5 \frac{1}{4-x} dx = 0 = -\ln(5-4). \text{ Συνεπώς οι παράγουσες είναι: } (\Delta) G(x) = -\ln(x-4) + c, c \in \mathbb{R}.$$

Σχόλιο: Κάθε φορά που εφαρμόσαμε το θεμελιώδες θεώρημα και τις μεθόδους ολοκλήρωσης, φροντίσαμε προηγουμένως να πληρούνται οι προϋποθέσεις, δηλαδή «εκτός των άλλων» στο $\int_\alpha^\beta f(x) dx$ να ισχύει $\alpha < \beta$.

3. Οι παράγουσες της $f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$ στο $(0, +\infty)$ είναι

A) $G(x) = \frac{\left(x - \frac{1}{x}\right)^3}{3} + c$, B) $G(x) = 2\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$, Γ) $G(x) = \frac{(1 - \ln x)^3}{3} + c$,

Δ) $G(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} - 2x + c, c \in \mathbb{R}$, Ε) $G(x) = \frac{\left(x - \frac{1}{x}\right)^3}{3} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + c$.

Αιτιολόγηση: $f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$ και είναι προφανές το (Δ).

$$G'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} - 2x + c\right)' = \frac{3x^2}{3} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) - 2 + 0 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = f(x)$$

4. Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 |x^2 - 1| dx$ είναι ίσο με

A) $\frac{4}{3}$, B) 0, Γ) $-\frac{4}{3}$, Δ) $\frac{2}{3}$, Ε) $\frac{5}{3}$.

Αιτιολόγηση: $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow |x|^2 \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow x^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow |x^2 - 1| = 1 - x^2$

$$\int_{-1}^1 |x^2 - 1| dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \left(1 - \frac{1^3}{3}\right) - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

6. Έστω f, g δυο παραγωγίσιμες συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους στο $[a, \beta]$. Αν $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει:

A) $f'(x) \leq g'(x), x \in [a, \beta]$,

B) $\int_a^\beta f(x) dx \leq \int_a^\beta g(x) dx$

Γ) $\int_\beta^a f(x) dx \leq \int_\beta^a g(x) dx$.

Αιτιολόγηση: $f(x) \leq g(x) \Rightarrow g(x) - f(x) \geq 0$ και επομένως $h(x) = g(x) - f(x) \geq 0$.

Τότε όμως, για τη συνεχή στο $[a, \beta]$ συνάρτηση h θα έχουμε ότι $\int_a^\beta h(x) dx \geq 0$, επομένως $\int_a^\beta [g(x) - f(x)] dx \geq 0$, δηλαδή $\int_a^\beta g(x) dx - \int_a^\beta f(x) dx \geq 0$ και συνεπώς $\int_a^\beta f(x) dx \leq \int_a^\beta g(x) dx$.

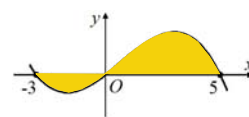
7. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του παρακάτω σχήματος είναι ίσο με

A) $\int_{-3}^5 f(x) dx$,

B) $\int_5^{-3} f(x) dx$.

Γ) $\int_{-3}^0 f(x) dx - \int_0^5 f(x) dx$,

Δ) $\int_0^{-3} f(x) dx + \int_0^5 f(x) dx$.



Αιτιολόγηση: $E = \int_{-3}^5 |f(x)| dx = \int_{-3}^0 |f(x)| dx + \int_0^5 |f(x)| dx = \int_{-3}^0 [-f(x)] dx + \int_0^5 f(x) dx =$
 $= -\int_{-3}^0 f(x) dx + \int_0^5 f(x) dx = \int_0^{-3} f(x) dx + \int_0^5 f(x) dx$

8. Αν $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in [-1, 1]$ και $f(0) = g(0) + 2$, τότε για κάθε $x \in [-1, 1]$ ισχύει:

A) $f(x) = g(x) - 2$, B) $\int_{-1}^1 (f(x) - g(x)) dx = 4$.

Γ) $f(x) \leq g(x), x \in [-1, 1]$ Δ) Οι C_f, C_g έχουν κοινό σημείο στο $[-1, 1]$.

Αιτιολόγηση: $f'(x) = g'(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + c, \forall x \in [-1, 1]$

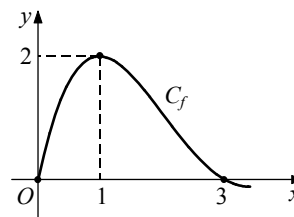
και επομένως $f(0) = g(0) + 2 \Rightarrow g(0) + c = g(0) + 2 \Rightarrow c = 2$.

Άρα $f(x) = g(x) + 2, \forall x \in [-1, 1]$, επομένως $f(x) - g(x) = 2, \forall x \in [-1, 1]$

και συνεπώς $\int_{-1}^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-1}^1 2 dx = 2[1 - (-1)] = 2(1 + 1) = 2 \cdot 2 = 4$

9. Έστω η συνάρτηση $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ όπου f η συνάρτηση του διπλανού σχήματος. Τότε η $F'(1)$ είναι ίση με

A) 0, B) 1, Γ) 2, Δ) $\frac{1}{2}$.



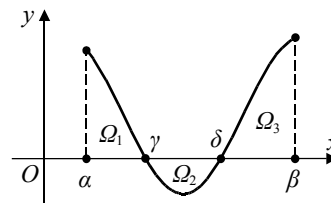
Αιτιολόγηση: $F(x) = \int_1^x f(t) dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$ και συνεπώς $F'(1) = f(1) = 2$.

10. Έστω η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος.

Αν $E(\Omega_1) = 2, E(\Omega_2) = 1$ και $E(\Omega_3) = 3$

τότε το $\int_a^\beta f(x) dx$ είναι ίσο με

A) 6, B) -4, Γ) 4, Δ) 0, E) 2.



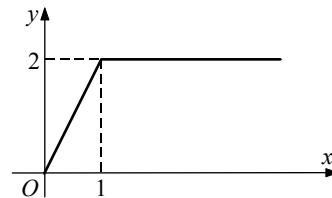
Αιτιολόγηση:

$\int_a^\beta f(x) dx = E(\Omega_1) - E(\Omega_2) + E(\Omega_3) = 2 - 1 + 3 = 4$ (Σχόλιο σελ. 346)

11. Έστω η συνάρτηση $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, όπου f η συνάρτηση του διπλανού σχήματος. Τότε

A) $F(x) = x^2$, B) $F(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \end{cases}$,

Γ) $F(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 2x, & 1 \leq x \end{cases}$, Δ) $F(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 2x-1, & 1 \leq x \end{cases}$.



Αιτιολόγηση: Επειδή μία ακριβώς* από τις προτεινόμενες συναρτήσεις είναι λύση,

τότε το $[0, +\infty) \subseteq D_F \subseteq D_f$, σαν τομή των πεδίων ορισμού των προτεινόμενων συναρτήσεων.

* Όταν υπάρχει η $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, είναι μοναδική.

Στο σχήμα **«φαίνεται»** ότι δεν υπάρχουν σημεία «αριστερά» του $O(0,0)$ και έτσι $D_f = [0, +\infty)$ και συνεπώς $D_{F'} = [0, +\infty)$. Έτσι θα **πρέπει** $F'(x) = f(x)$ στο $[0, +\infty)$.

Δεν είναι η (Α): Αν $F(x) = x^2$ τότε $D_{F'} = D_F = \mathbb{R}$, ενώ θα πρέπει $D_{F'} = [0, +\infty)$.

ή δεν είναι η (Α), αφού η $F'(x) = 2x$ **είναι παραγωγίσιμη** στο $x_0 = 1$, ενώ η C_f **«φαίνεται»** να παρουσιάζει **«γωνία»** στο $A(1,2)$ και επομένως η f **δεν είναι παραγωγίσιμη** στο 1.

Δεν είναι η (Β), αφού η $F'(x) = \begin{cases} 2, & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{αν } 1 < x \end{cases}$ **δεν ορίζεται** στο $x_0 = 1$,

ενώ θα έπρεπε $D_{F'} = [0, +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 = 2 \neq 0 = \lim_{x \rightarrow 1^+} 0 = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1}$$

Δεν είναι η (Γ), αφού η $F(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 2x, & 1 \leq x \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

και επομένως **δεν είναι παραγωγίσιμη** στο $x_0 = 1$, ενώ θα έπρεπε $D_{F'} = [0, +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 \neq 2 = F(1)$$

Επομένως είναι η (Δ), η οποία προφανώς δεν αντιφάσκει με τα δεδομένα .

$$F(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1, & 1 \leq x \end{cases} \Rightarrow F'(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \end{cases}$$

Σχόλιο: Οι ασκήσεις αυτές είναι πολύ χρήσιμες, στην προσπάθεια καταπολέμησης της επιπολαιότητας. Το πρόβλημα είναι ότι δεν έχει συμφωνηθεί κάποιο πλαίσιο λειτουργίας. Κατά τη γνώμη μας, η βέλτιστη εκδοχή λειτουργίας, θα έπρεπε να απαιτεί «όλα τα συμπεράσματα να στηρίζονται **αποκλειστικά** στις ρητά διατυπωμένες αλγεβρικές σχέσεις» και το σχήμα να λειτουργεί επικουρικά.

Εμείς στην κατεύθυνση αυτή, περιορίσαμε το «φαίνεται» στο «ελάχιστο». Από τα δύο «φαίνεται» που χρησιμοποιήσαμε πιο αδύναμο φαντάζει αυτό με τη **«γωνία»**. Στον αντίποδα της δικής μας λειτουργίας: «Είναι η (Δ) που «φαίνεται» να ταιριάζει ακριβώς, αφού

$$F(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1, & 1 \leq x \end{cases} \Rightarrow f(x) = F'(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \end{cases} \gg$$

III.

2. Ποια από τα παρακάτω ολοκληρώματα είναι καλώς ορισμένα;

A) $\int_0^1 \frac{1}{x-1} dx$,

B) $\int_0^{\pi/2} \eta \mu x dx$,

Γ) $\int_0^{\pi} \epsilon \phi x dx$

Δ) $\int_0^1 \ln x dx$,

Ε) $\int_0^2 \sqrt{1-x^2} dx$,

Ζ) $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$.

Αιτιολόγηση: Στο (B), η $f(x) = \eta \mu x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και επομένως είναι συνεχής

και στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Επίσης στο (Ζ), η $f(x) = \frac{1}{x+1}$ είναι συνεχής στο $(-1, +\infty)$

και επομένως είναι συνεχής και στο $[0, 1]$.

(Α): η $f(x) = \frac{1}{x-1}$ δεν ορίζεται στο 1 και επομένως δεν είναι συνεχής στο $[0,1]$.

(Γ): η $f(x) = \varepsilon\phi x$ δεν ορίζεται στο $\frac{\pi}{2}$ και επομένως δεν είναι συνεχής στο $[0,\pi]$.

(Δ): η $f(x) = \ln x$ δεν ορίζεται στο 0 και επομένως δεν είναι συνεχής στο $[0,1]$.

(Ε): η $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ δεν ορίζεται στο 2 και επομένως δεν είναι συνεχής στο $[0,2]$.

Σχόλιο: Για να ορίζεται το $\int_a^b f(x)dx$, θα πρέπει η f να είναι συνεχής στο $[a,b]$.

4. Να εντοπίσετε το λάθος στις παρακάτω πράξεις

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+\frac{1}{u^2}} \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = -\int_{-1}^1 \frac{1}{1+u^2} du = -I \quad (\text{Για } x = \frac{1}{u} \text{ και } dx = -\frac{1}{u^2} du)$$

Άρα $I = -I$ οπότε $I = 0$.

Αυτό, όμως, είναι άτοπο, αφού $I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx > 0$, επειδή $\frac{1}{1+x^2} > 0$, για κάθε $x \in [-1,1]$.

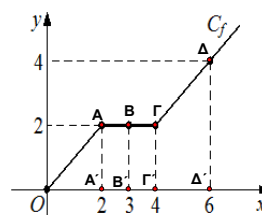
Αιτιολόγηση: Το $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+\frac{1}{u^2}} \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\right) du$ δεν ορίζεται, αφού η $f(u) = \frac{1}{1+\frac{1}{u^2}} \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\right)$

δεν ορίζεται στο 0 και επομένως δεν είναι συνεχής στο $[-1,1]$.

5. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = \int_0^x f(t)dt$,

όπου f η συνάρτηση του διπλανού σχήματος.

Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά.



$$F(0) = 0, \quad F(2) = 2, \quad F(3) = 4, \quad F(4) = 6, \quad F(6) = 12.$$

Αιτιολόγηση: Για να βρεθούν οι τιμές της συνάρτησης, είναι αναγκαίο να είναι ευθύγραμμα τμήματα τα ΟΑ, ΑΓ και ΓΔ, να είναι τα Α,Β,Γ συνευθειακά και το ΑΓ παράλληλο στον άξονα $x'x$. Με αυτά τα δεδομένα: $F(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$

$$F(2) = \int_0^2 f(t)dt = (\text{OAA}') = 2, \quad (\text{OAA}') = \frac{\beta \cdot \nu}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$$

$$F(3) = \int_0^3 f(t)dt = \int_0^2 f(t)dt + \int_2^3 f(t)dt = 2 + (\text{ABB}'\text{A}') = 2 + 2 = 4,$$

$$(\text{ABB}'\text{A}') = \beta \cdot \nu = 1 \cdot 2 = 2 = (\text{BΓΓ}'\text{B}')$$

$$F(4) = \int_0^4 f(t)dt = \int_0^3 f(t)dt + \int_3^4 f(t)dt = 4 + (\text{BΓΓ}'\text{B}') = 4 + 2 = 6$$

$$F(6) = \int_0^6 f(t)dt = \int_0^4 f(t)dt + \int_4^6 f(t)dt = 6 + (\text{ΓΔΔ}'\text{T}') = 6 + 6 = 12$$

$$(\text{ΓΔΔ}'\text{T}') = \frac{\beta + \text{B}}{2} \cdot \nu = \frac{2+4}{2} \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6$$

Σχόλιο: Αυτά που εμείς θεωρήσαμε αναγκαία για να απαντήσουμε, και στη συνέχεια τα θεωρήσαμε δεδομένα, γνώμη μας είναι ότι θα έπρεπε να δίνονται στην υπόθεση.