

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ I

ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ

Θα ασχοληθούμε με **συναρτήσεις** $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, με $A \subseteq \mathbb{R}$ και $A \neq \emptyset$.

Θέτοντας $f(x) = y$, το x θα ονομάζεται ανεξάρτητη μεταβλητή και το y εξαρτημένη.

Το πεδίο ορισμού A , θα είναι **διάστημα** ή **ένωση διαστημάτων**.

Άσκηση 1^η: Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

$$(α) f(x) = \log(x-2) + \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{-x^2+4x-3}}, \quad (β) f(x) = \frac{x+2}{(x^2-3x+2) \cdot \ln(1-e^x)}$$

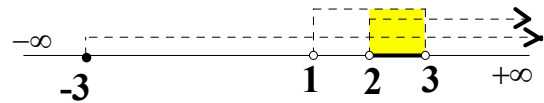
Λύση: Όπως γνωρίζουμε, όταν μας δίνεται μόνο ο τύπος της συνάρτησης, θα θεωρούμε πεδίο ορισμού το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, μέσα στο οποίο «έχει νόημα ο τύπος».

(α) Για να έχει νόημα ο τύπος, «πρέπει και αρκεί», $\{x-2 > 0 \text{ και } x+3 \geq 0 \text{ και } -x^2+4x-3 > 0\}$,

δηλαδή $\{x > 2 \text{ και } x \geq -3 \text{ και } 1 < x < 3\}$,

και επομένως $2 < x < 3$.

Αρα το πεδίο ορισμού της f , είναι $D_f = (2, 3)$.



$$\begin{aligned} (β) \text{ Αφού } f(x) &= \frac{x+2}{(x^2-3x+2) \cdot \ln(1-e^x)}, \text{ επομένως } x \in D_f \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2-3x+2 \neq 0 \\ \text{και } 1-e^x > 0 \\ \text{και } \ln(1-e^x) \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \neq 1 \text{ και } x \neq 2 \\ \text{και } 1 > e^x \\ \text{και } 1-e^x \neq 1 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \neq 1 \text{ και } x \neq 2 \\ \text{και } e^0 > e^x \\ \text{και } e^x \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \neq 1 \text{ και } x \neq 2 \\ \text{και } 0 > x \\ \text{και } x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Leftrightarrow x < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \\ &\text{και συνεπώς } D_f = (-\infty, 0). \end{aligned}$$

Σημειώσεις: Στην (α) απαιτήσαμε $-x^2+4x-3 > 0$, αφού το τριώνυμο $-x^2+4x-3$ είναι

«μέσα σε ρίζα» $[-x^2+4x-3 \geq 0]$, και βρίσκεται στον παρονομαστή $[\sqrt[3]{-x^2+4x-3} \neq 0]$.

$-x^2+4x-3 > 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3$, αφού ο συντελεστής a είναι $a = -1$, και το τριώνυμο είναι «θετικό», δηλαδή «ετερόσημο» του a , «εντός των ριζών» του.

Στην (β) γίνεται μια επίδειξη εργασίας με το $(\neq)$. Συνεχίζουμε να πιστεύουμε, ότι για μαθητές εξοικειωμένους με τη λύση εξισώσεων, αυτό είναι επικίνδυνο. Θα μπορούσαμε να λύσουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις, και στη συνέχεια γνωρίζοντας τότε η παράσταση «γίνεται μηδέν», να διαπιστώσουμε τότε «γίνεται διάφορη του μηδενός».

Π.χ. Λάθος: « $x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$, δηλαδή $x \neq 1$ ~~και~~ $x \neq -1$ ». Ο μαθητής διάβασε $\boxed{\pm = \left\{ \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right\} \text{ ορισμός}}$.

Σωστό: $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Leftrightarrow \{x = 1 \text{ ή } x = -1\}$ και επομένως $x^2 \neq 1 \Leftrightarrow \{x \neq 1 \text{ και } x \neq -1\}$.

Άσκηση 2^η: Το εμβαδόν E ενός κύκλου ακτίνας ρ , δίνεται από τον τύπο $E = \pi \cdot \rho^2$, $\boxed{\pi \approx 3,14}$.

(α) Να εκφράσετε το εμβαδόν E , ως συνάρτηση της ακτίνας ρ και να βρείτε το πεδίο ορισμού.

(β) Ποια είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και ποια η εξαρτημένη;

Λύση: (α) $E(\rho) = \pi \cdot \rho^2$ με $\rho > 0$, και επομένως $D_E = (0, +\infty)$.

Είναι $\rho > 0$, αφού το μήκος ευθυγράμμου τμήματος είναι αριθμός μη αρνητικός

και προφανώς δεν μας ενδιαφέρει η περίπτωση που ο κύκλος εκφυλίζεται σε σημείο, με $\rho = 0$.

(β) Προφανώς ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η ρ , και εξαρτημένη το E .

Προσοχή: Στην $f(x) = \pi \cdot x^2$, $\boxed{\pi \approx 3,14}$, έχουμε $D_f = \mathbb{R}$.

ΙΣΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ορισμός: $f = g \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} D_f = D_g = A \\ \text{και } f(x) = g(x), \forall x \in A \end{array} \right\}$

$\forall = \text{«για κάθε»}$
ορ.

Η χρήση των συμβόλων
« $\forall$ » και « $\exists$ »,
είναι προαιρετική.

$f \neq g \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} D_f \neq D_g \\ \text{ή } \exists x \in D_f \cap D_g : f(x) \neq g(x) \end{array} \right\}$

$\exists = \text{«υπάρχει τουλάχιστον ένα»}$
ορ.

Όταν $f \neq g$ και υπάρχει $\Gamma \neq \emptyset$ με $\Gamma \subseteq D_f \cap D_g$ έτσι ώστε $f(x) \neq g(x), \forall x \in \Gamma$, τότε λέμε ότι « $f \neq g$, στο Γ ». Για μας, το Γ έχει αξία, μόνο αν είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

Άσκηση 3^η: Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι $f = g$.

Στις περιπτώσεις που είναι $f \neq g$ να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, στο οποίο ισχύει $f = g$.

i) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + |x|}$ και $g(x) = 1 - \frac{1}{|x|}$, ii) $f(x) = \sqrt{x^2}$ και $g(x) = (\sqrt{x})^2$

iii) $f(x) = (\sqrt{x+1})^2$ και $g(x) = \frac{(x+1)(\sqrt{1-x})^2}{1-x}$

Λύση: i) Αφού $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + |x|}$, επομένως $x \in D_f \Leftrightarrow \{x^2 + |x| \neq 0\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{x^2 \neq 0 \text{ ή } |x| \neq 0\} \Leftrightarrow x \neq 0$ και συνεπώς $D_f = \mathbb{R}^*$.

Αφού $g(x) = 1 - \frac{1}{|x|}$, επομένως $x \in D_g \Leftrightarrow |x| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και συνεπώς $D_g = \mathbb{R}^*$.

Έτσι $D_f = D_g = \mathbb{R}^*$.

Όταν $x \in \mathbb{R}^*$, τότε $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + |x|} = \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + |x|} = \frac{(|x| - 1)(|x| + 1)}{|x|(|x| + 1)} = \frac{|x| - 1}{|x|} = \frac{|x|}{|x|} - \frac{1}{|x|} = 1 - \frac{1}{|x|} = g(x)$

και συνεπώς $f = g$.

ii) Αφού $f(x) = \sqrt{x^2}$, επομένως $x \in D_f \Leftrightarrow x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ και συνεπώς $D_f = \mathbb{R}$.

Αφού $g(x) = (\sqrt{x})^2$, επομένως $x \in D_g \Leftrightarrow x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, +\infty)$ και συνεπώς $D_g = [0, +\infty)$.

Επειδή $D_f = \mathbb{R} \neq [0, +\infty) = D_g$, άρα $f \neq g$.

Όμως $D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap [0, +\infty) = [0, +\infty) \neq \emptyset$ και παρατηρούμε ότι στο $[0, +\infty)$,

ισχύει $f(x) = \sqrt{x^2} = |x| = x = (\sqrt{x})^2 = g(x)$, και επομένως « $f = g$ στο $[0, +\infty)$ ».

iii) Αφού $f(x) = (\sqrt{x+1})^2$, επομένως $x \in D_f \Leftrightarrow x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \Leftrightarrow x \in [-1, +\infty)$

και συνεπώς $f(x) = (\sqrt{x+1})^2 = x+1$, στο $D_f = [-1, +\infty)$.

Αφού $g(x) = \frac{(x+1)(\sqrt{1-x})^2}{1-x}$, άρα $x \in D_g \Leftrightarrow \{1-x \geq 0 \text{ και } 1-x \neq 0\} \Leftrightarrow 1-x > 0 \Leftrightarrow 1 > x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 1)$ και συνεπώς $g(x) = \frac{(x+1)(\sqrt{1-x})^2}{1-x} = \frac{(x+1)(1-x)}{1-x} = x+1$, στο $D_g = (-\infty, 1)$.

Επειδή $D_f = [-1, +\infty) \neq (-\infty, 1) = D_g$, άρα $f \neq g$.

Όμως $\forall x \in [-1, 1) = D_f \cap D_g : f(x) = x+1 = g(x)$, και συνεπώς « $f = g$ στο $[-1, 1)$ ».

Σχόλια: (1) Προφανώς, το $D_f \cap D_g \neq \emptyset$, είναι το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$,

στο οποίο μπορεί να ισχύει $f = g$.

(2) Στο (ii) είδαμε ότι, $D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap [0, +\infty) = [0, +\infty)$. Αυτό ισχύει, αφού $[0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$.

Γενικά όταν $A \subseteq B$, τότε $A \cap B = A$.

(3) Στο (i) ισχύει: $\{x^2 + |x| \neq 0\} \Leftrightarrow \{x^2 \neq 0 \text{ ή } |x| \neq 0\}$, αφού $\{x^2 + |x| = 0\} \Leftrightarrow x^2 = |x| = 0$.

Πρόταση: Αν $a, b, c \in [0, +\infty)$ και $a + b + c = 0$, τότε $\{a = 0 \text{ και } b = 0 \text{ και } c = 0\}$.

Απόδειξη: Έστω ότι ισχύουν: $a, b, c \in [0, +\infty)$ και $a + b + c = 0$, και δεν ισχύει $\{a = b = c = 0\}$.

Έστω δηλαδή ότι $a > 0$. Όμως τότε, $a > 0 \Rightarrow a + b + c > b + c \geq 0 \Rightarrow a + b + c > 0$. ΑΤΟΠΟ

Δεν μπορεί να ισχύει $a + b + c > 0$, αφού έχουμε στην υπόθεσή μας ότι $a + b + c = 0$.

Στο ΑΤΟΠΟ οδηγηθήκαμε, όταν κάναμε την «υπόθεση εργασίας», ότι δεν ισχύει $\{a = b = c = 0\}$.

Αρα η υπόθεση αυτή είναι μια λανθασμένη υπόθεση, και συνεπώς ισχύει ότι $\{a = b = c = 0\}$.

Προφανώς, το παραπάνω ισχύει για όσους αριθμούς το χρειαζόμαστε, και αντιστρόφως.

ΘΕΣΗ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ

Άσκηση 4^η: Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x} \text{ βρίσκεται πάνω από τον άξονα } x'x.$$

Λύση: $x \in D_f \Leftrightarrow 1-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{1\}$ και επομένως $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

Τα σημεία $(x, f(x))$ της γραφικής παράστασης, που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$, είναι αυτά και μόνο αυτά για τα οποία $f(x) > 0$.

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow \{(1+x)(1-x) > 0 \text{ και } x \neq 1\} \Leftrightarrow \{-x^2 + 1 > 0 \text{ και } x \neq 1\} \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

* Το τριώνυμο $-x^2 + 1$ γίνεται θετικό, δηλαδή ετερόσημο του $a = -1$, «εντός των ριζών».

$$\text{ή } -x^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x|^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

ή με τη χρήση πίνακα.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1+x$	-	0	+	+
$1-x$	+		+	-
$f(x)$	-	0	+	-

Άσκηση 5^η: Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση C_f , της συνάρτησης με τύπο $f(x) = x^3 + 2x + 1$ βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης $g(x) = x + 1$.

Λύση: Προφανώς $D_f = D_g = \mathbb{R}$, και συνεπώς οι δυο συναρτήσεις μπορούν να «συγκριθούν» σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού τους.

Ένα σημείο $(x_i, f(x_i))$ της C_f βρίσκεται πάνω από το αντίστοιχό του $(x_i, g(x_i))$ της C_g , «τότε και μόνο τότε» αν $f(x_i) > g(x_i)$.

Επομένως για να βρούμε το ζητούμενο, αρκεί να λύσουμε την ανίσωση $f(x) > g(x)$.

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^3 + 2x + 1 > x + 1 \Leftrightarrow x^3 + x > 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

Αρα, η γραφική παράσταση C_f , βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση C_g για $x \in (0, +\infty)$.

ΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ $f + g, f - g, f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$

Αν f, g συναρτήσεις με $A = D_f \cap D_g \neq \emptyset$, τότε ορίζονται οι συναρτήσεις $f + g, f - g, f \cdot g$ με πεδίο ορισμού το A , ως εξής: $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ και $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Αν $B = A - \{x \in D_g \mid g(x) = 0\} \neq \emptyset$, ορίζεται η $\frac{f}{g}$ με πεδίο ορισμού το B , και $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Άσκηση 6^η: Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ και $g(x) = \frac{x}{1-x}$.

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$.

Λύση: $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^*$ και επομένως $D_f = \mathbb{R}^*$.

$x \in D_g \Leftrightarrow 1-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{1\}$ και επομένως $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$.

Έτσι $A = D_f \cap D_g = \mathbb{R}^* \cap (\mathbb{R} - \{1\}) = \mathbb{R} - \{0, 1\} \neq \emptyset$. Επίσης $g(x) = \frac{x}{1-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Επομένως ορίζονται οι συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$ με πεδίο ορισμού το A και τύπο:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{x}{1-x}, \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{x}{1-x},$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x}{1-x}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{\frac{x}{1-x}}$$

Παρατηρήσεις: (1) Το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το ίδιο με των $f+g$, $f-g$ και $f \cdot g$, αφού το A δεν περιέχει τη ρίζα της g .

(2) Δεν προκύπτει από την εκφώνηση, υποχρέωση απλοποίησης των τύπων.

Αν όμως μας ζητηθεί, ή προκύψει από την ίδια την άσκηση, τότε είναι κάτι απλό.

(3) Οι $f+g$, $f-g$ και $f \cdot g$ ορίζονται, «αν και μόνο αν» $D_f \cap D_g \neq \emptyset$.

(4) Η $\frac{f}{g}$ ορίζεται, «αν και μόνο αν» $(D_f \cap D_g) - \{x \in D_g \mid g(x) = 0\} \neq \emptyset$.

Άσκηση 7^η: Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ και $g(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$, με απλοποιημένη μορφή τύπου.

Λύση: $x \in D_f \Leftrightarrow \{x \geq 0 \text{ και } x \neq 0\} \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x \in (0, +\infty)$, και επομένως $D_f = (0, +\infty)$.

Ομοίως $D_g = (0, +\infty)$.

Έτσι $A = D_f \cap D_g = (0, +\infty) \cap (0, +\infty) = (0, +\infty) \neq \emptyset$.

Επομένως ορίζονται οι συναρτήσεις $f+g$, $f-g$ και $f \cdot g$ με πεδίο ορισμού το A και τύπο:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) - \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = (\sqrt{x})^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x}$$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ και $D_{\frac{f}{g}} = A - \{1\} = (0, +\infty) - \{1\} = (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

$$\text{Άρα, } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}{\frac{x-1}{\sqrt{x}}} = \frac{(x+1)\cancel{\sqrt{x}}}{(x-1)\cancel{\sqrt{x}}} = \frac{x+1}{x-1}.$$