

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ II

ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Για δυο συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$,

τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση $(g \circ f)$, με όνομα «σύνθεση της f με την g »,

με πεδίο ορισμού $D_{g \circ f} = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$ και $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall x \in D_{g \circ f}$.

Σημειώσεις: (1) Ο συμβολισμός $(g \circ f)(x) = g(f(x))$,

δικαιώνει το χαρακτηρισμό της f σαν πρώτης, αφού αυτή έρχεται πρώτη σε «επαφή» με το x .

(2) $f(A) = f(D_f)$ είναι το σύνολο των εικόνων της πρώτης συνάρτησης, δηλαδή της f .

(3) Προφανώς $D_{g \circ f} \subseteq A$, δηλαδή $D_{g \circ f} \subseteq D_f$.

«Το πεδίο ορισμού (Π.Ο.) της σύνθεσης, είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της πρώτης»

(4) Επειδή $x \in D_{g \circ f} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_f \text{ και} \\ f(x) \in D_g \end{cases}$, αν $f(D_f) \subseteq D_g$, τότε $D_{g \circ f} = D_f$.

Το Π.Ο. της $(g \circ f)$, αποτελείται από όλα εκείνα τα στοιχεία του Π.Ο. της f ,

των οποίων η εικόνα μέσω της f , βρίσκεται μέσα στο Π.Ο. της g .

Έτσι όταν $f(D_f) \subseteq D_g$, όλα τα στοιχεία του Π.Ο. της f ,

«βρίσκουν» την εικόνα τους μέσα στο Π.Ο. της g , και επομένως $D_{g \circ f} = D_f$.

Προφανώς όταν $D_g = \mathbb{R}$, τότε πάντα $f(D_f) \subseteq \mathbb{R} = D_g$, και συνεπώς $D_{g \circ f} = D_f$.

Άσκηση 1^η: Να βρεθούν οι $g \circ f$ και $f \circ g$, αν $f(x) = \sqrt{3-x}$ και $g(x) = \log(1-x)$.

Λύση: $x \in D_f \Leftrightarrow 3-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$ και επομένως $D_f = (-\infty, 3]$.

$D_g = (-\infty, 1)$, αφού $x \in D_g \Leftrightarrow 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$.

$$x \in D_{g \circ f} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_f \\ \text{και} \\ f(x) \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ \text{και} \\ \sqrt{3-x} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ \text{και} \\ (\sqrt{3-x})^2 < 1^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ \text{και} \\ 3-x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ \text{και} \\ 2 < x \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x \leq 3$$

Άρα $D_{g \circ f} = (2, 3]$ και $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{3-x}) = \log(1-\sqrt{3-x})$.

$$x \in D_{f \circ g} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_g \\ \text{και} \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ \text{και} \\ \log(1-x) \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ \text{και} \\ \log(1-x) \leq \log 10^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ \text{και} \\ 1-x \leq 10^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ \text{και} \\ 1-10^3 \leq x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{x < 1 \text{ και } -999 \leq x\} \Leftrightarrow -999 \leq x < 1.$$

Άρα $D_{f \circ g} = [-999, 1)$ και $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\log(1-x)) = \sqrt{3-\log(1-x)}$.

Παρατηρήσεις: Προφανώς $g \circ f \neq f \circ g$, αφού $D_{g \circ f} = (2, 3] \neq [-999, 1) = D_{f \circ g}$.

Επίσης, δεν υπάρχει περίπτωση να είναι « $g \circ f = f \circ g$ στο ...», αφού $D_{g \circ f} \cap D_{f \circ g} = \emptyset$.

Στην εκφώνηση, μας λένε «να βρεθούν...», και εμείς οφείλουμε να θεωρήσουμε ότι υπάρχουν.

Έτσι μπορούμε αμέσως να χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα $D_{g \circ f}$ και $D_{f \circ g}$.

Προφανώς η χρήση αυτών των συμβόλων, προϋποθέτει την ύπαρξη των $g \circ f$ και $f \circ g$.

Άσκηση 2^η: Αν $f(x) = \sqrt{1-x}$ και $g(x) = x^2$.

(α) Να εξετασθεί αν υπάρχει η $g \circ f$, και αν υπάρχει να βρεθεί.

(β) Να εξετασθεί αν υπάρχει η $f \circ g$, και αν υπάρχει να βρεθεί.

(γ) Αν υπάρχουν οι $g \circ f$ και $f \circ g$, να εξετασθεί αν $g \circ f = f \circ g$.

(δ) Αν $g \circ f \neq f \circ g$, να εξετασθεί αν $g \circ f = f \circ g$, σε κάποιο διάστημα του $\mathbb{R}$.

Λύση: Έχουμε $D_g = \mathbb{R}$, και $D_f = (-\infty, 1]$, αφού $x \in D_f \Leftrightarrow 1-x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq x \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1]$.

(α) Επειδή $D_g = \mathbb{R}$, $\forall x \in D_f$ θα ισχύει $f(x) \in \mathbb{R} = D_g$, και επομένως $f(D_f) \subseteq D_g$.

Άρα $f(D_f) \cap D_g = f(D_f) \neq \emptyset$, και συνεπώς υπάρχει η $g \circ f$,

με $D_{g \circ f} = D_f = (-\infty, 1]$ και $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{1-x}) = (\sqrt{1-x})^2 = 1-x$.

(β) Επειδή $g(0) = 0 \in (-\infty, 1] = D_f$, άρα $g(D_g) \cap D_f \neq \emptyset$ και συνεπώς υπάρχει η $f \circ g$.

$$x \in D_{f \circ g} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in D_g \\ \text{και} \\ g(x) \in D_f \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ \text{και} \\ x^2 \leq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow |x|^2 \leq 1^2 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

Άρα $D_{f \circ g} = [-1, 1]$ και $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{1-x^2}$.

(γ) Προφανώς $g \circ f \neq f \circ g$, αφού $D_{g \circ f} = (-\infty, 1] \neq [-1, 1] = D_{f \circ g}$.

(δ) Επειδή $D_{g \circ f} \cap D_{f \circ g} = (-\infty, 1] \cap [-1, 1] = [-1, 1] \neq \emptyset$, θα εξετάσουμε αν είναι δυνατό

να ισχύσει $g \circ f = f \circ g$ σε κάποιο διάστημα, υποσύνολο του $[-1, 1]$.

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \\ \text{και } x \in [-1, 1] \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1-x^2} = 1-x \\ \text{και } x \in [-1, 1] \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\sqrt{1-x^2})^2 = (1-x)^2 \\ \text{και } x \in [-1, 1] \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1-x^2 = 1+x^2-2x \\ \text{και } x \in [-1, 1] \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2-x=0 \\ \text{και } x \in [-1, 1] \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(x-1)=0 \\ \text{και } x \in [-1, 1] \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{x=0 \text{ ή } x=1\} \\ \text{και } x \in [-1, 1] \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ \text{ή } x=1 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Επομένως δεν είναι δυνατό, να ισχύσει $g \circ f = f \circ g$, σε κάποιο διάστημα του $\mathbb{R}$.

Παρατηρήσεις: (1) Για άλλη μια φορά, μπορούμε να διαπιστώσουμε, ότι είναι **λάθος** να λέμε: «γενικά ισχύει $g \circ f = f \circ g$ ». Υπενθυμίζουμε ότι αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι κάτι δεν ισχύει γενικά, αρκεί να αποδείξουμε ότι δεν ισχύει ειδικά.

Δηλαδή, αρκεί να βρούμε έστω και ένα παράδειγμα, στο οποίο να μην ισχύει.

(2) Στην τελευταία ερώτηση, ζητήσαμε να εξετασθεί «αν $g \circ f = f \circ g$, σε κάποιο διάστημα του $\mathbb{R}$ », αφού έχουμε εστιάσει το ενδιαφέρον μας, σε συναρτήσεις που είναι ορισμένες σε διάστημα ή σε ένωση διαστημάτων. Ασφαλώς, $g \circ f = f \circ g$ στο $\{0, 1\}$.

(3) Στο (β), για να αποδείξουμε ότι υπάρχει η $f \circ g$, μας άρκεσε η ύπαρξη μιας εικόνας της πρώτης, στο πεδίο ορισμού της δεύτερης. Θα μπορούσαμε να βρούμε ολόκληρο το σύνολο εικόνων της g , όμως προτιμήσαμε την «οικονομική» λύση.

«Για την ιστορία»: Ισχύει $g(D_g) = g(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$.

Απόδειξη: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 \geq 0$, και επομένως $g(D_g) = g(\mathbb{R}) \subseteq [0, +\infty)$.

Για κάθε $y \geq 0$, η εξίσωση $y = x^2 = f(x)$ έχει λύση $x \in \mathbb{R}$, επομένως κάθε $y \geq 0$,

είναι εικόνα κάποιου $x \in \mathbb{R}$, και συνεπώς $[0, +\infty) \subseteq g(\mathbb{R}) = g(D_g)$.

Αφού $g(D_g) \subseteq [0, +\infty)$ και $[0, +\infty) \subseteq g(D_g)$, επομένως $g(D_g) = [0, +\infty)$.

Άσκηση 3^η: Να εκφράσετε την f ως σύνθεση δύο η περισσότερων συναρτήσεων αν:

(i) $f(x) = \eta\mu(x^2 + 1)$, (ii) $f(x) = 2\eta\mu^2 3x + 1$ και (iii) $f(x) = \ln(e^{2x} - 1)$.

Λύση: (i) $f(x) = \eta\mu(x^2 + 1)$. Προφανώς $D_f = \mathbb{R}$.

Για $g(x) = x^2 + 1$ και $h(x) = \eta\mu x$, ισχύει:

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(x^2 + 1) = \eta\mu(x^2 + 1) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}, \text{ και συνεπώς } h \circ g = f.$$

(ii) $f(x) = 2\eta\mu^2 3x + 1$. Προφανώς $D_f = \mathbb{R}$.

Για $\phi(x) = 3x$, $g(x) = \eta\mu x$ και $h(x) = 2x^2 + 1$, ισχύει:

$$((h \circ g) \circ \phi)(x) = (h \circ g)(\phi(x)) = h(g(\phi(x))) = h(g(3x)) = h(\eta\mu 3x) = 2\eta\mu^2 3x + 1 = f(x) \\ \forall x \in \mathbb{R}, \text{ και συνεπώς } (h \circ g) \circ \phi = f.$$

(iii) $f(x) = \ln(e^{2x} - 1) = \ln((e^x)^2 - 1)$. Έχουμε $D_f = (0, +\infty)$, αφού:

$$x \in D_f \Leftrightarrow e^{2x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow e^{2x} > e^0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x \in (0, +\infty)$$

Για $\phi(x) = e^x$, $g(x) = x^2 - 1$ και $h(x) = \ln x$, ισχύει:

$$((h \circ g) \circ \phi)(x) = (h \circ g)(\phi(x)) = h(g(\phi(x))) = h(g(e^x)) = h((e^x)^2 - 1) = \ln(e^{2x} - 1) = f(x) \\ \forall x \in (0, +\infty), \text{ και συνεπώς } (h \circ g) \circ \phi = f.$$

Ισχύει γενικά ότι: Αν για τις συναρτήσεις h, g και ϕ υπάρχει η συνάρτηση $(h \circ g) \circ \phi$, τότε υπάρχει και η συνάρτηση $h \circ (g \circ \phi)$, και ισχύει $(h \circ g) \circ \phi = h \circ (g \circ \phi)$.

Άσκηση 4^η: Να βρείτε (μια) συνάρτηση f τέτοια, ώστε να ισχύει:

(i) $(f \circ g)(x) = x^2 + 2x + 2$, αν $g(x) = x + 1$.

(ii) $(f \circ g)(x) = \sqrt{1 + x^2}$, αν $g(x) = -x^2$.

(iii) $(g \circ f)(x) = |\sin x|$, αν $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Προσοχή: Δε μας ζητάνε όλες τις λύσεις του προβλήματος, αλλά μόνο μία.

1^η περίπτωση: Αναζητώ μια συνάρτηση, ικανή «να παίξει το ρόλο της δεύτερης» στη σύνθεση.

Λύση: (i) $(f \circ g)(x) = x^2 + 2x + 2$, αν $g(x) = x + 1$. Προφανώς $D_g = \mathbb{R}$.

$$(f \circ g)(x) = x^2 + 2x + 2 \Leftrightarrow f(g(x)) = x^2 + 2x + 2, \text{ και αν θέσουμε } g(x) = x + 1 = \omega,$$

$$\text{τότε } x = \omega - 1 \text{ και } f(\omega) = (\omega - 1)^2 + 2(\omega - 1) + 2,$$

$$\text{δηλαδή } f(\omega) = \omega^2 - 2\omega + 1 + 2\omega - 2 + 2 = \omega^2 + 1, \text{ και συνεπώς } f(\omega) = \omega^2 + 1.$$

$$\text{Προτεινόμενη συνάρτηση η } f(x) = x^2 + 1, \text{ με } D_f = \mathbb{R}.$$

$$\text{Προφανώς, αφού } D_f = \mathbb{R}, \text{ τότε } g(D_g) \subseteq \mathbb{R} = D_f \text{ και συνεπώς } D_{f \circ g} = D_g = \mathbb{R}.$$

Επαλήθευση: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2 + 1 = x^2 + 2x + 1 + 1 = x^2 + 2x + 2$

(ii) $(f \circ g)(x) = \sqrt{1 + x^2}$, αν $g(x) = -x^2$. Προφανώς $D_g = \mathbb{R}$.

$$f(g(x)) = \sqrt{1 + x^2}, \text{ και αν θέσουμε } g(x) = -x^2 = \omega, \text{ τότε } x^2 = -\omega \text{ και } f(\omega) = \sqrt{1 - \omega}.$$

$$\text{Προτεινόμενη συνάρτηση η } f(x) = \sqrt{1 - x}, \text{ με } D_f = (-\infty, 1], \text{ αφού } 1 - x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq x.$$

$$\forall x \in D_g = \mathbb{R}, \text{ ισχύει } g(x) = -x^2 \leq 0, \text{ επομένως } g(D_g) \subseteq (-\infty, 0] \subseteq (-\infty, 1] = D_f,$$

$$\text{και συνεπώς } D_{f \circ g} = D_g = \mathbb{R}.$$

Επαλήθευση: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-x^2) = \sqrt{1 - (-x^2)} = \sqrt{1 + x^2}.$

Σχόλιο: Εκεί που κρίνεται η «λύση», είναι στο αν η προτεινόμενη συνάρτηση ικανοποιεί τη σύνθεση. Όταν θέσαμε $g(x) = -x^2 = \omega$, μπορούσαμε να παρατηρήσουμε ότι $\omega = -x^2 \leq 0$ και στη συνέχεια να προτείνουμε για «λύση», τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x}$, με $D_f = (-\infty, 0]$, δηλαδή ένα «περιορισμό» της «λύσης» που προτείναμε.

Όμως αν μια συνάρτηση είναι ικανή να πραγματοποιήσει μια σύνθεση σα δεύτερη, πόσο μάλλον είναι ικανή, μια «επέκτασή της» στα «όρια» των δυνατοτήτων του τύπου της.

2^η περίπτωση: Αναζητώ μια συνάρτηση, ικανή «να παίζει το ρόλο της πρώτης» στη σύνθεση.
(iii) $(g \circ f)(x) = |\sin x|$, αν $g(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Έχουμε $D_g = [-1, 1]$, αφού $1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq x^2 \Leftrightarrow 1^2 \geq |x|^2 \Leftrightarrow 1 \geq |x| \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

$$(g \circ f)(x) = |\sin x| \Leftrightarrow g(f(x)) = |\sin x| \Leftrightarrow \sqrt{1-f^2(x)} = |\sin x| \Leftrightarrow 1-f^2(x) = |\sin x|^2 \Leftrightarrow 1-\sin^2 x = f^2(x) \Leftrightarrow f^2(x) = \eta\mu^2 x \Leftrightarrow |f(x)|^2 = |\eta\mu x|^2 \Leftrightarrow |f(x)| = |\eta\mu x|$$

Προτεινόμενη συνάρτηση η $f(x) = \eta\mu x$, με $D_f = \mathbb{R}$.

$$x \in D_{g \circ f} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in D_f \\ \text{και} \\ f(x) \in D_g \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ \text{και} \\ |\eta\mu x| \in [-1, 1] \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}, \text{ και συνεπώς } D_{g \circ f} = \mathbb{R}.$$

Επαλήθευση: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\eta\mu x) = \sqrt{1-\eta\mu^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|$.

Προσοχή: Το ότι $\forall x \in \mathbb{R} : |f(x)| = |\eta\mu x| \Leftrightarrow f(x) = \pm \eta\mu x$,

δεν θα πρέπει να μας βάλει στον πειρασμό να ισχυριστούμε, πως γνωρίζουμε όλες τις λύσεις. Εξάλλου, δεν είναι αυτό το ζητούμενο. Μια από τις λύσεις μας ζήτησαν.

Άσκηση 5^η: Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x - \alpha}$, με $\beta \neq -\alpha^2$ και $g(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$.

Να αποδείξετε ότι: α) $f(f(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R} - \{\alpha\}$ και β) $g(g(x)) = x, \forall x \in [0, 1]$.

Απόδειξη: (α) $f(f(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R} - \{\alpha\}$. Προφανώς $D_f = \mathbb{R} - \{\alpha\}$.

$$x \in D_{f \circ f} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in D_f \\ \text{και} \\ f(x) \in D_f \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} - \{\alpha\} \\ \text{και} \\ \frac{\alpha x + \beta}{x - \alpha} \neq \alpha \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} - \{\alpha\} \\ \text{και} \\ \alpha x + \beta \neq \alpha x - \alpha^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} - \{\alpha\} \\ \text{και} \\ \beta \neq -\alpha^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{\alpha\}, \text{ επομένως } D_{f \circ f} = \mathbb{R} - \{\alpha\} \text{ και:}$$

$$f(f(x)) = f\left(\frac{\alpha x + \beta}{x - \alpha}\right) = \frac{\alpha \frac{\alpha x + \beta}{x - \alpha} + \beta}{\frac{\alpha x + \beta}{x - \alpha} - \alpha} = \frac{\frac{\alpha^2 x + \alpha\beta + \beta x - \beta\alpha}{x - \alpha}}{\frac{\alpha x + \beta - \alpha x + \alpha^2}{x - \alpha}} = \frac{(\alpha^2 x + \beta x)(\cancel{x - \alpha})}{(\beta + \alpha^2)(\cancel{x - \alpha})} = \frac{x(\beta + \alpha^2)}{\beta + \alpha^2} = x$$

β) $g(g(x)) = x, \forall x \in [0, 1]$. Προφανώς $D_g = [0, +\infty)$ και $g(x) = x - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0$.

Άρα $g(D_g) \subseteq [0, +\infty) = D_g$, και επομένως $D_{g \circ g} = D_g = [0, +\infty)$.

Αφού $D_{g \circ g} = [0, +\infty)$, επομένως η $g \circ g$ ορίζεται στο $[0, 1]$.

Για την g στο $[0, 1]$, ισχύει: $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq 1 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 \leq 0 \Rightarrow |\sqrt{x} - 1| = 1 - \sqrt{x}$ και

$$g(g(x)) = g\left((\sqrt{x} - 1)^2\right) = \left(\sqrt{(\sqrt{x} - 1)^2} - 1\right)^2 = (|\sqrt{x} - 1| - 1)^2 = (1 - \sqrt{x} - 1)^2 = (\sqrt{x})^2 = x.$$

MONOTONEΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΟΛΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Άσκηση 6^η: Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες και ποιες γνησίως φθίνουσες. Για τις μονότονες, να βρεθούν τα ολικά ακρότατα, αν υπάρχουν.

(i) $f(x) = \sqrt{1-x}$, (ii) $f(x) = 2 \ln(x-2) - 1$

(iii) $f(x) = 3e^{1-x} + 1$, (iv) $f(x) = (x-1)^2 - 1$, με $D_f = (-\infty, 1]$

Λύση: (i) $f(x) = \sqrt{1-x}$. Έχουμε $D_f = (-\infty, 1]$, αφού $1-x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq x$.

Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, 1]$ με $x_1 < x_2$.

Τότε, $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 1-x_1 > 1-x_2 \xRightarrow{h'} \sqrt{1-x_1} > \sqrt{1-x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Για την $h(x) = \sqrt{x}$, ισχύει $h' \nearrow$.

Αφού για το τυχαίο ζευγάρι $x_1, x_2 \in D_f$ ισχύει $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, επομένως για κάθε

$x_1, x_2 \in D_f$ ισχύει $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, και συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα. $f \searrow$

Ισχύει: $\forall x \in (-\infty, 1] \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < 1 \\ \text{ή } x = 1 \end{array} \right\} \xRightarrow[f \text{ συνάρτηση}]{f \searrow} \left\{ \begin{array}{l} f(x) > f(1) \\ \text{ή } f(x) = f(1) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \geq f(1) = 0$,

και συνεπώς η f παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 = 1$, το $f(1) = 0$. $\min f = f(1) = 0$

(ii) $f(x) = 2 \ln(x-2) - 1$. Έχουμε $D_f = (2, +\infty)$, αφού $x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Έστω $x_1, x_2 \in (2, +\infty)$ με $x_1 < x_2$.

Τότε, $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \xRightarrow{h'} \ln(x_1 - 2) < \ln(x_2 - 2) \Rightarrow 2 \ln(x_1 - 2) < 2 \ln(x_2 - 2) \Rightarrow$

Για την $h(x) = \ln x$, ισχύει $h' \nearrow$.

$\Rightarrow 2 \ln(x_1 - 2) - 1 < 2 \ln(x_2 - 2) - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, και αφού αυτό ισχύει για το τυχαίο

ζευγάρι $x_1, x_2 \in D_f$, επομένως για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ ισχύει $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,

και συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα. $f \nearrow$.

Η f δεν παρουσιάζει ακρότατα, αφού είναι γνησίως μονότονη σε ανοικτό διάστημα.

(iii) $f(x) = 3e^{1-x} + 1$. Προφανώς $D_f = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$.

$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 1-x_1 > 1-x_2 \xRightarrow{h'} e^{1-x_1} > e^{1-x_2} \Rightarrow 3e^{1-x_1} + 1 > 3e^{1-x_2} + 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Για την $h(x) = e^x$, ισχύει $h' \nearrow$.

Αφού για το τυχαίο ζευγάρι $x_1, x_2 \in D_f$ ισχύει $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, επομένως για κάθε

$x_1, x_2 \in D_f$ ισχύει $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, και συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα. $f \searrow$

Η f δεν παρουσιάζει ακρότατα, αφού είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

(iv) $f(x) = (x-1)^2 - 1$, με $D_f = (-\infty, 1]$. Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, 1]$ με $x_1 < x_2$.

$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \xRightarrow{h'} (x_1 - 1)^2 > (x_2 - 1)^2 \Rightarrow (x_1 - 1)^2 - 1 > (x_2 - 1)^2 - 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Για την $h(x) = x^2$, ισχύει $h' \searrow$ στο $(-\infty, 0]$.

Αφού για το τυχαίο ζευγάρι $x_1, x_2 \in D_f$ ισχύει $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, επομένως για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ ισχύει $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, και συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα. $\boxed{f \searrow}$

Ισχύει: $\forall x \in (-\infty, 1] \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow f(x) \geq f(1) = -1$,

και συνεπώς η f παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 = 1$, το $f(1) = -1$. $\boxed{\min f = f(1) = -1}$

Σχόλια: (1) Η γνησίως αύξουσα συνάρτηση, διατηρεί τη σχέση διάταξης των «αρχετύπων» $x_1, x_2 \in D_f$, και στις εικόνες τους, ενώ η γνησίως φθίνουσα την ανατρέπει.

(2) Οι γνησίως μονότονες συναρτήσεις, με πεδίο ορισμού διάστημα, παρουσιάζουν (ολικά) ακρότατα, στα «κλειστά» άκρα του πεδίου ορισμού τους, και μόνο σε αυτά.

Άσκηση 7^η: Να δείξετε ότι:

- i) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ ,
τότε η συνάρτηση $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .
- ii) Αν δυο συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ ,
τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .
- iii) Αν δυο συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ , και ισχύει $f(x) \geq 0$
και $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Delta$, τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Απόδειξη: i) Έστω $f \nearrow \Delta$. Τότε $\forall x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, θα ισχύει και $f(x_1) < f(x_2)$.

Όμως τότε θα έχουμε $-f(x_1) > -f(x_2)$, δηλαδή $(-f)(x_1) > (-f)(x_2)$ και συνεπώς $(-f) \searrow \Delta$.

ii) Έστω $f \nearrow \Delta$ και $g \nearrow \Delta$. Τότε $\forall x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, θα ισχύουν $\left\{ \begin{array}{l} f(x_1) < f(x_2) \\ \text{και } g(x_1) < g(x_2) \end{array} \right\}$

επομένως $f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2)$, δηλαδή $(f + g)(x_1) < (f + g)(x_2)$

και συνεπώς $(f + g) \nearrow \Delta$.

iii) Έστω $f \nearrow \Delta$ και $g \nearrow \Delta$. Τότε $\forall x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, θα ισχύουν $\left\{ \begin{array}{l} f(x_1) < f(x_2) \\ \text{και } g(x_1) < g(x_2) \end{array} \right\}$

επομένως $f(x_1) \cdot g(x_1) < f(x_2) \cdot g(x_2)$, δηλαδή $(f \cdot g)(x_1) < (f \cdot g)(x_2)$

και συνεπώς $(f \cdot g) \nearrow \Delta$.

Παρατηρήσεις: (1) Αλλάζοντας αμοιβαία τις λέξεις «αύξουσα» και «φθίνουσα», η άσκηση 7, μας δίνει ανάλογα συμπεράσματα για γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις.

(2) Στο (iii) χρησιμοποιήσαμε την «ιδιότητα»:

$$\text{Αν } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in [0, +\infty) \text{ τότε: } \left\{ \begin{array}{l} \alpha < \beta \\ \text{και } \gamma < \delta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha\gamma < \beta\delta$$

Απόδειξη: Έστω ότι $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in [0, +\infty)$ με $\{\alpha < \beta \text{ και } \gamma < \delta\}$.

Αφού $\gamma < \delta$, άρα $\delta > 0$. (Αν $\delta = 0$ θα είναι $\gamma < \delta = 0$. ΑΤΟΠΟ αφού $\gamma \geq 0$)

Έτσι θα έχουμε $\gamma < \delta \xRightarrow{\alpha \geq 0} \alpha\gamma \leq \alpha\delta$ και $\alpha < \beta \xRightarrow{\delta > 0} \alpha\delta < \beta\delta$, επομένως $\alpha\gamma \leq \alpha\delta < \beta\delta$
και συνεπώς $\alpha\gamma < \beta\delta$.

(3) Είναι γνωστό ότι: «Αν $\forall x_1, x_2 \in \Delta \subseteq D_f$ με $x_1 < x_2$, ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$,

τότε η f λέγεται αύξουσα συνάρτηση στο Δ , και συμβολίζουμε $f \nearrow \Delta$ ».

Ομοίως: «Αν $\forall x_1, x_2 \in \Delta \subseteq D_f$ με $x_1 < x_2$, ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$,

τότε η f λέγεται φθίνουσα συνάρτηση στο Δ , και συμβολίζουμε $f \searrow \Delta$ ».

Αν μια συνάρτηση είναι αύξουσα ή φθίνουσα, τότε λέγεται μονότονη,

και επειδή $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha \leq \beta$, κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση, είναι και (απλώς) μονότονη.