

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ III

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ορισμός: (i) Μια συνάρτηση f είναι «1-1», «τότε και μόνο τότε» αν,

$$\forall x_1, x_2 \in D_f \text{ με } f(x_1) = f(x_2), \text{ ισχύει: } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Αυτή η μορφή του ορισμού, χρησιμοποιείται συνήθως, όταν θέλω να αποδείξω ότι η f είναι «1-1».

(ii) Μια συνάρτηση f είναι «1-1», «τότε και μόνο τότε» αν,

$$\forall x_1, x_2 \in D_f \text{ με } x_1 \neq x_2, \text{ ισχύει: } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Αυτή η μορφή χρησιμοποιείται συνήθως, όταν θέλω να υποστηρίξω ότι η f δεν είναι «1-1».

➤ Επίσης, για να είναι μια συνάρτηση f «1-1», αρκεί να είναι γνησίως μονότονη.

Παρατήρηση: (1) Όταν η f είναι «1-1», τότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ,

$$\text{και ισχύει: } \left\{ \begin{array}{l} f(x) = y \\ \text{και } x \in D_f \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f^{-1}(y) = x \\ \text{και } y \in D_{f^{-1}} = f(D_f) \end{array} \right\}.$$

Έτσι, όποιος κατορθώσει να πάει από τον τύπο λυμένο ως προς y , στον τύπο λυμένο ως προς x ,

με ισοδυναμία, έχει όχι μόνο τον τύπο της f^{-1} , αλλά και το πεδίο ορισμού της.

(2) Ισχύουν: $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$ με $D_{f^{-1} \circ f} = D_f$,

$$\text{και } (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x \text{ με } D_{f \circ f^{-1}} = D_{f^{-1}}.$$

(3) Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} , είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

Άσκηση 1^η: (α) Να βρείτε αν η συνάρτηση $f(x) = 3x - 2$ είναι «1-1»,

και αν είναι, να βρείτε την αντίστροφή της.

(β) Να βρεθεί η αντίστροφη της $g(x) = 3x - 2$, με $D_g = [-1, 3]$.

Λύση: (α) Προφανώς $D_f = \mathbb{R}$, και συνεπώς $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R} = D_f$ με $f(x_1) = f(x_2)$.

$$\text{Τότε, } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 - 2 = 3x_2 - 2 \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Αφού για το τυχαίο ζευγάρι $x_1, x_2 \in \mathbb{R} = D_f$ με $f(x_1) = f(x_2)$, ισχύει $x_1 = x_2$,

άρα για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R} = D_f$ με $f(x_1) = f(x_2)$, ισχύει $x_1 = x_2$, και συνεπώς η f είναι «1-1».

Επειδή η f είναι «1-1», επομένως υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .

$$\text{Γενικά ισχύει } f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x, \text{ και επειδή } 3x - 2 = y \Leftrightarrow 3x = y + 2 \Leftrightarrow x = \frac{y+2}{3},$$

$$\text{άρα } f^{-1}(y) = \frac{y+2}{3}, \text{ με } f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Αλλάζοντας το όνομα της μεταβλητής, με το «συμβατικό όνομα» x ,

$$\text{για τις ανεξάρτητες μεταβλητές, έχουμε: } f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}.$$

Σχόλιο: «Προχωρήσαμε» από τον τύπο λυμένο ως προς y , στον τύπο λυμένο ως προς x , χωρίς να συνοδεύουμε την όλη διαδικασία με τα «πεδία ορισμού» των f και f^{-1} . Θεωρήσαμε προφανές ότι η επεξεργασία της «γραμμικής σχέσης» $3x - 2 = y$ συνοδεύεται από το « $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y \in \mathbb{R}$ ».

Είναι αυτονόητο, ότι δεν είναι υποχρεωτικός ο αυστηρός συμβολισμός, φτάνει να ελέγχουμε τις ισοδυναμίες και να καταγράφουμε συγκεντρωτικά τους «περιορισμούς» που προκύπτουν για το y .

Η προσοχή μας θα πρέπει να είναι μεγάλη, ιδιαίτερα στο σκέλος ($\Leftrightarrow$) της ισοδυναμίας.

(β) Προφανώς η g είναι «1-1», σαν «περιορισμός» της f , στο $[-1, 3]$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x-2=y \\ \text{και } -1 \leq x \leq 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x=y+2 \\ \text{και } -1 \leq x \leq 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=\frac{y+2}{3} \\ \text{και } -1 \leq \frac{y+2}{3} \leq 3 \end{array} \right\} \stackrel{*}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} x=\frac{y+2}{3} \\ \text{και } -5 \leq y \leq 7 \end{array} \right\}$$

$$\text{Άρα } g^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}, \text{ με } g^{-1}: [-5, 7] \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$* \quad -1 \leq \frac{y+2}{3} \leq 3 \Leftrightarrow -1 \cdot 3 \leq \frac{y+2}{3} \cdot 3 \leq 3 \cdot 3 \Leftrightarrow -3 \leq y+2 \leq 9 \Leftrightarrow -3-2 \leq y+2-2 \leq 9-2 \Leftrightarrow -5 \leq y \leq 7$$

Άσκηση 2^η: Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι «1-1»,

και για κάθε μια από αυτές που είναι «1-1», να βρεθεί η αντίστροφή της.

$$(1) f(x) = x^2 + 1, \quad (2) f(x) = (x-1)(x-2) + 1, \quad (3) f(x) = |x-1|$$

$$(4) f(x) = \sqrt[3]{1-x}, \quad (5) f(x) = \ln(1-x), \quad (6) f(x) = e^{-x} + 1, \quad (7) f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

Λύση: (1) $f(x) = x^2 + 1$. Προφανώς $D_f = \mathbb{R}$, και συνεπώς $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $f(2) = 2^2 + 1 = 5$ και $f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$. Άρα η f **δεν είναι «1-1»**.

Δεν μπορεί να είναι μια συνάρτηση f «1-1», όταν υπάρχουν δυο διαφορετικά στοιχεία του πεδίου ορισμού της, $\boxed{2 \neq -2}$, με ίσες εικόνες $\boxed{f(2) = 5 = f(-2)}$.

Σχόλιο: Τους δυο διαφορετικούς αριθμούς, θα μπορούσαμε να τους βρούμε, λύνοντας την εξίσωση $f(x) = x^2 + 1 = \alpha$, με τον αριθμό α να επιλέγεται από το $[1, +\infty)$, αφού $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow f(x) \geq 1$.

Έτσι π.χ., αν $\alpha = 5$, τότε $x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$ και επομένως $f(2) = f(-2) = 5$,

ενώ αν $\alpha = 17$, τότε $x^2 + 1 = 17 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$ και επομένως $f(4) = f(-4) = 17$.

Λύση: (2) $f(x) = (x-1)(x-2) + 1$. Προφανώς $D_f = \mathbb{R}$, και συνεπώς $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Επειδή $f(2) = 1 = f(1)$, η f **δεν είναι «1-1»**.

Λύση: (3) $f(x) = |x-1|$. Προφανώς $D_f = \mathbb{R}$, και συνεπώς $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Επειδή $f(2) = 1 = f(0)$, η f **δεν είναι «1-1»**.

Εύρεση: $f(x) = |x-1| = 1 \Leftrightarrow \{x-1=1 \text{ ή } x-1=-1\} \Leftrightarrow \{x=2 \text{ ή } x=0\}$ και έτσι $f(2) = f(0) = 1$.

Λύση: (4) $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$. Έχουμε $D_f = (-\infty, 1]$, αφού $1-x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq x$, και συνεπώς $f: (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, 1] = D_f$ με $f(x_1) = f(x_2)$.

$$\text{Τότε, } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt[3]{1-x_1} = \sqrt[3]{1-x_2} \stackrel{h, \langle 1-1 \rangle}{\Rightarrow} 1-x_1 = 1-x_2 \Rightarrow -x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

$$\boxed{h(x) = \sqrt[3]{x}, \quad \langle 1-1 \rangle}$$

Αφού για το τυχαίο ζευγάρι $x_1, x_2 \in (-\infty, 1] = D_f$ με $f(x_1) = f(x_2)$, ισχύει $x_1 = x_2$,

άρα για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 1] = D_f$ με $f(x_1) = f(x_2)$, ισχύει $x_1 = x_2$, και συνεπώς η f **είναι «1-1»**.

Επειδή η f είναι «1-1», επομένως υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = y \\ \text{και } x \leq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[3]{1-x} = y \\ \text{και } 1-x \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1-x = y^3 \\ \text{και } y^3 \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1-y^3 = x \\ \text{και } y \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f^{-1}(y) = x \\ \text{και } y \geq 0 \end{array} \right\},$$

$$\text{άρα } f^{-1}(y) = 1 - y^3, \text{ με } f^{-1}: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$\text{Δηλαδή } f^{-1}(x) = 1 - x^3 \text{ με } f^{-1}: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Λύση: (5) $f(x) = \ln(1-x)$. Έχουμε $D_f = (-\infty, 1)$, αφού $1-x > 0 \Leftrightarrow 1 > x$, και $f: (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$.

Η f είναι «1-1», επειδή $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 1) = D_f$ με $f(x_1) = f(x_2)$,

$$\text{ισχύει } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \ln(1-x_1) = \ln(1-x_2) \stackrel{h, \langle 1-1 \rangle}{\Rightarrow} 1-x_1 = 1-x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

$$\boxed{h(x) = \ln x, \quad \langle 1-1 \rangle}$$

Επειδή η f είναι «1-1», επομένως υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = y \\ \text{και } x < 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ln(1-x) = y \\ \text{και } 1-x > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1-x = e^y \\ \text{και } e^y > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1-e^y = x \\ \text{και } y \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f^{-1}(y) = x \\ \text{και } y \in \mathbb{R} \end{array} \right\},$$

άρα $f^{-1}(y) = 1 - e^y$, με $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Δηλαδή $f^{-1}(x) = 1 - e^x$, με $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Λύση: (6) $f(x) = e^{-x} + 1$. Προφανώς $D_f = \mathbb{R}$, και συνεπώς $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Η f είναι «1-1», επειδή $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} = D_f$ με $f(x_1) = f(x_2)$,

$$\text{ισχύει } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{-x_1} + 1 = e^{-x_2} + 1 \Rightarrow e^{-x_1} = e^{-x_2} \stackrel{h, \langle 1-1 \rangle}{\Rightarrow} -x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

$$\boxed{h(x) = e^x, \quad \langle 1-1 \rangle}$$

Επειδή η f είναι «1-1», επομένως υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .

Γενικά $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$, και επειδή $e^{-x} + 1 = y \Leftrightarrow e^{-x} = y - 1 \Leftrightarrow -x = \ln(y-1) \Leftrightarrow x = -\ln(y-1)$, $y > 1$

άρα $f^{-1}(y) = -\ln(y-1)$, με $f^{-1}: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Δηλαδή $f^{-1}(x) = -\ln(x-1)$, με $f^{-1}: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Λύση: (7) $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$. Προφανώς $D_f = \mathbb{R}$, και συνεπώς $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Η f είναι «1-1», επειδή $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} = D_f$ με $f(x_1) = f(x_2)$,

$$\text{ισχύει } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{e^{x_1} - 1}{e^{x_1} + 1} = \frac{e^{x_2} - 1}{e^{x_2} + 1} \Rightarrow (e^{x_1} - 1)(e^{x_2} + 1) = (e^{x_2} - 1)(e^{x_1} + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{e^{x_1} e^{x_2}} - e^{x_2} + e^{x_1} - 1 = \cancel{e^{x_2} e^{x_1}} - e^{x_1} + e^{x_2} - 1 \Rightarrow 2e^{x_1} = 2e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \stackrel{h, \langle 1-1 \rangle}{\Rightarrow} x_1 = x_2$$

$$\boxed{h(x) = e^x, \quad \langle 1-1 \rangle}$$

Επειδή η f είναι «1-1», επομένως υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .

Γενικά $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$, και επειδή: $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = y \Leftrightarrow e^x - 1 = y(e^x + 1) \Leftrightarrow e^x - 1 = ye^x + y \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^x - ye^x = 1 + y \Leftrightarrow e^x(1-y) = 1+y \Leftrightarrow e^x = \frac{1+y}{1-y} \stackrel{1+y > 0}{\Leftrightarrow} x = \ln \frac{1+y}{1-y} \quad \boxed{\frac{1+y}{1-y} > 0 \Leftrightarrow -1 < y < 1}$$

άρα $f^{-1}(y) = \ln \frac{1+y}{1-y}$, με $f^{-1}: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$. Δηλαδή $f^{-1}(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$, με $f^{-1}: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$.

Άσκηση 3^η: Να βρεθεί η αντίστροφη συνάρτηση της $f(x) = x^3$.

Λύση: Προφανώς $D_f = \mathbb{R}$, και επειδή $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, $f \nearrow$.

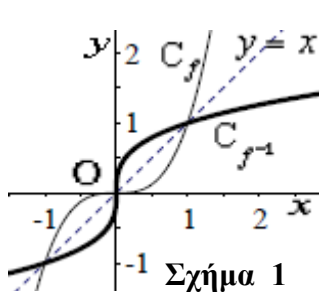
Όμως αφού $f \nearrow$, άρα η f είναι «1-1», και επομένως υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = y \\ \text{και } x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^3 = y \\ \text{και } y \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{x^3 = y \text{ και } y \geq 0\} \\ \text{ή } \{x^3 = y \text{ και } y < 0\} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{x^3 = y \text{ και } y \geq 0\} \\ \text{ή } \{(-x)^3 = -y \text{ και } -y > 0\} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

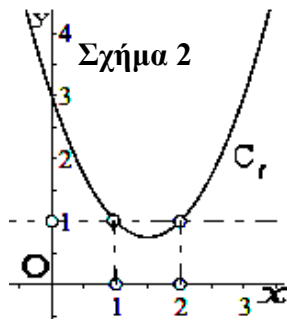
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{x = \sqrt[3]{y} \text{ και } y \geq 0\} \\ \text{ή } \{-x = \sqrt[3]{-y} \text{ και } -y > 0\} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{x = \sqrt[3]{y} \text{ και } y \geq 0\} \\ \text{ή } \{x = -\sqrt[3]{-y} \text{ και } -y > 0\} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{f^{-1}(y) = x \text{ και } y \geq 0\} \\ \text{ή } \{f^{-1}(y) = x \text{ και } y < 0\} \end{array} \right\}.$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y}, & \text{αν } y \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-y}, & \text{αν } y < 0 \end{cases}, \text{ δηλαδή } f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & \text{αν } x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & \text{αν } x < 0 \end{cases}.$$

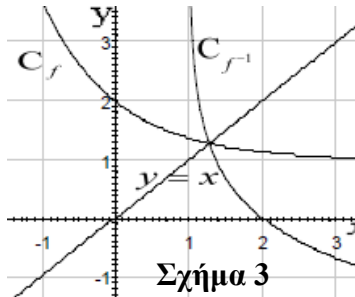
ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ



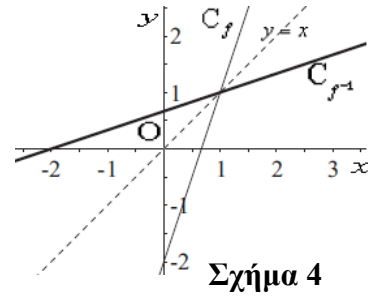
Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3



Σχήμα 4

1. Στο **σχήμα (1)**, φαίνεται η γραφική παράσταση C_f της $f(x) = x^3$ με λεπτή γραμμή, η $C_{f^{-1}}$ της f^{-1} με χονδρή γραμμή, και της ευθείας $y = x$, με διακεκομμένη.

Η ευθεία $y = x$ είναι άξονας συμμετρίας του σχήματος.

Οι C_f και $C_{f^{-1}}$, είναι συμμετρικές ως προς την $y = x$.

Επειδή $f \nearrow$, τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$, βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = x$.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ και } f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

2. Στο **σχήμα (2)**, φαίνεται η γραφική παράσταση C_f , της $f(x) = (x-1)(x-2) + 1$.

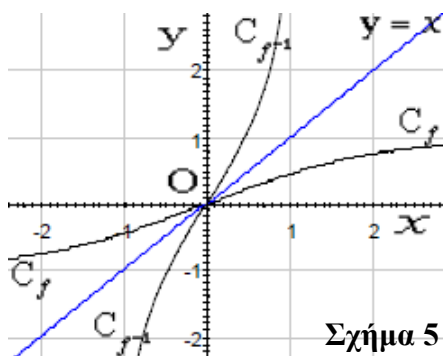
Φαίνεται καθαρά, γιατί η f δεν είναι «1-1», αφού η ευθεία $y = 1$

τέμνει τη C_f σε δυο σημεία. Έχουμε $f(2) = 1 = f(1)$.

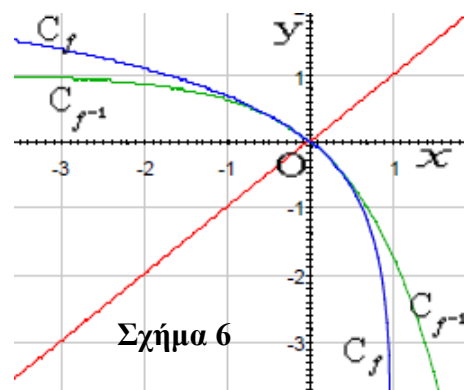
3. Στο **σχήμα (3)** φαίνονται, η C_f της $f(x) = e^{-x} + 1$ και η $C_{f^{-1}}$ της $f^{-1}(x) = -\ln(x-1)$,

με $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $f^{-1}: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

4. Στο **σχήμα (4)** μπορούμε να δούμε τη γραφική παράσταση C_f , της $f(x) = 3x - 2$ με λεπτή γραμμή, τη $C_{f^{-1}}$ της f^{-1} με χονδρή γραμμή, και της ευθείας $y = x$, με διακεκομμένη.



Σχήμα 5



Σχήμα 6

5. Στο **σχήμα (5)**, μπορούμε να δούμε τη γραφική παράσταση C_f , της $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

και τη $C_{f^{-1}}$ της $f^{-1}(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$, με $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $f^{-1}: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$.

Η $C_{f^{-1}}$ είναι «εγκλωβισμένη» ανάμεσα στις ευθείες $x = -1$ και $x = 1$.

6. Στο **σχήμα (6)**, μπορούμε να δούμε τη γραφική παράσταση C_f , της $f(x) = \ln(1-x)$

και τη $C_{f^{-1}}$ της $f^{-1}(x) = 1 - e^x$, με $f: (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ και $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.