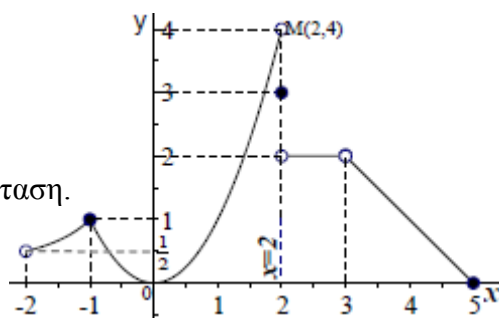


ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ στο $x_0 \in \mathbb{R}$

1. Δίνεται η συνάρτηση $f : (-2, 3) \cup (3, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x}, & \text{αν } -2 < x \leq -1 \\ x^2, & \text{αν } -1 < x < 2 \\ 3, & \text{αν } x = 2 \\ 2, & \text{αν } 2 < x < 3 \\ -x + 5, & \text{αν } 3 < x \leq 5 \end{cases} \quad \text{και η γραφική της παράσταση.}$$



Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα:

(i) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$, (ii) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, (iv) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, (v) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, (vi) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

Λύση: (α) «Γεωμετρικά» (i) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{1}{2}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$, αφού $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

(iv) Δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, αφού $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4 \neq 2 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

Σχόλιο: Το σημείο $M(2,4)$, της ευθείας $x = 2$, δεν ανήκει στη γραφική παράσταση, ανήκει όμως στην παραβολή $y = x^2$, που είναι ο **φορέας** του τμήματος της γραφικής παράστασης, «στα αριστερά» της ευθείας $x = 2$. Έτσι το M έχει με το τμήμα της γραφικής παράστασης «στα αριστερά» της ευθείας $x = 2$, την ίδια σχέση που έχει το άκρο μιας ημιευθείας, με την υπόλοιπη ημιευθεία.

Το όριο, είναι η τεταγμένη του M , και συνεπώς $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4$.

(v) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$, αφού $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ και (vi) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 0$

(β) «Αλγεβρικά» (i) Παρατηρούμε ότι η f δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(\alpha, -2)$

και επομένως, εργαζόμενοι στο $(-2, -1)$ θα έχουμε: $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-1}{x} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

(ii) Για $x \in (-2, -1)$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-1}{x} = \frac{-1}{-1} = 1$

και για $x \in (-1, 0)$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 = (-1)^2 = 1$.

Αφού $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, άρα $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$.

(iii) Για $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^2 = 0$.

(iv) Για $x \in (1, 2)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = 2^2 = 4$ και για $x \in (2, 3)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2 = 2$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4 \neq 2 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

(v) Για $x \in (2, 3)$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 2 = 2$ και για $x \in (3, 4)$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (-x + 5) = -3 + 5 = 2$.

Αφού $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$, άρα $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$.

(vi) Η f δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(5, \beta)$, και επομένως, εργαζόμενοι στο διάστημα $(4, 5)$

θα έχουμε: $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} (-x + 5) = -5 + 5 = 0$.

Σχόλιο: Θα μπορούσαμε να εργαστούμε σε οποιοδήποτε διάστημα $(\alpha, 5)$, με $3 \leq \alpha < 5$, όχι όμως σε διάστημα $(\alpha, 5)$, με $-2 \leq \alpha < 3$, γιατί τότε δε θα μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε $f(x) = -x + 5$.

Εξάλλου, εδώ έχουμε πρόσθετο πρόβλημα το γεγονός, ότι το **3** δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού.

2. Έστω μια συνάρτηση f με $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ αν: (i) $g(x) = 3(f(x))^2 - 5$, (ii) $g(x) = \frac{|2f(x) - 11|}{(f(x))^2 + 1}$

Λύση: (i) $g(x) = 3(f(x))^2 - 5$.

Επειδή όλα τα επιμέρους όρια υπάρχουν στο $\mathbb{R}$, δηλαδή $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ και $\lim_{x \rightarrow 2} 5 = 5$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} [3(f(x))^2 - 5] = \lim_{x \rightarrow 2} [3(f(x))^2] - \lim_{x \rightarrow 2} 5 = 3 \lim_{x \rightarrow 2} (f(x))^2 - 5 = 3 \left(\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \right)^2 - 5 = \\ &= 3 \cdot 4^2 - 5 = 3 \cdot 16 - 5 = 48 - 5 = 43 \end{aligned}$$

(ii) $g(x) = \frac{|2f(x) - 11|}{(f(x))^2 + 1}$.

Επειδή όλα τα επιμέρους όρια υπάρχουν στο $\mathbb{R}$

και $\lim_{x \rightarrow 2} [(f(x))^2 + 1] = \lim_{x \rightarrow 2} (f(x))^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 1 = \left(\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \right)^2 + 1 = 4^2 + 1 = 16 + 1 = 17 \neq 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|2f(x) - 11|}{(f(x))^2 + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} |2f(x) - 11|}{\lim_{x \rightarrow 2} [(f(x))^2 + 1]} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} [2f(x) - 11]}{17} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} [2f(x)] - \lim_{x \rightarrow 2} 11}{17} = \\ &= \frac{2 \lim_{x \rightarrow 2} f(x) - 11}{17} = \frac{2 \cdot 4 - 11}{17} = \frac{8 - 11}{17} = \frac{-3}{17} = -\frac{3}{17} \end{aligned}$$

Σχόλιο: Το **Θεώρημα** της σελίδας 166, («Άλγεβρα ορίων»),

(π.χ.) θέτει την ύπαρξη των $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$ (εννοείται στο $\mathbb{R}$),

σαν προϋπόθεση, για να μας «δώσει» το δικαίωμα να πούμε ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$.

Έτσι κι εμείς, όταν θέλουμε να βρούμε το όριο μιας συνάρτησης, που έχει προκύψει σαν αποτέλεσμα πράξεων ανάμεσα σε άλλες συναρτήσεις, θα πρέπει να έχουμε **εξασφαλίσει** την **ύπαρξη** των **ορίων** αυτών των συναρτήσεων, καθώς και τις **συνθήκες** που επιβάλλει η ύπαρξη **κλάσματος, ρίζας** κ.λ.π., και μετά να προχωρήσουμε στην εύρεση του ορίου, με την «Άλγεβρα ορίων».

3. Να βρείτε τα όρια: (i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)^3 - 27}{x}$ και (iii) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$.

Λύση: (i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$. Για $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ με $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 1) = 2 - 1 = 1 \neq 0$, για $x \in (1, 2) \cup (2, 3)$, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{2^2 - 1}{2 - 1} = \frac{3}{1} = 3$,

σαν όριο ρητής συνάρτησης.

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)^3 - 27}{x}$. Για $f(x) = \frac{(x+3)^3 - 27}{x}$ με $D_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, δε μπορούμε να εργαστούμε, με την «Άλγεβρα των ορίων».

$$\begin{aligned} \text{Στο } \mathbb{R}^*, \text{ έχουμε: } f(x) &= \frac{(x+3)^3 - 27}{x} = \frac{(x+3)^3 - 3^3}{x} = \frac{[(x+3) - 3][(x+3)^2 + (x+3) \cdot 3 + 3^2]}{x} = \\ &= \frac{(x+3-3)(x^2 + 6x + 9 + 3x + 9 + 9)}{x} = \frac{x(x^2 + 9x + 27)}{x} = x^2 + 9x + 27 \end{aligned}$$

$$\text{Έτσι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)^3 - 27}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 9x + 27) = 0^2 + 9 \cdot 0 + 27 = 27.$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}. \text{ Για } f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4} = \frac{\sqrt{x}-2}{(x-1)(x-4)} \text{ με } D_f = [0,1) \cup (1,4) \cup (4,+\infty),$$

αφού για να ορίζεται η f , «πρέπει και αρκεί» $\{x \geq 0 \text{ και } (x-1)(x-4) \neq 0\}$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 4} [(x-1)(x-4)] = 0$, δε μπορούμε να εργαστούμε, με την «Άλγεβρα των ορίων».

$$\boxed{\sqrt{x}+2 \neq 0 \text{ στο } \mathbb{R}} \text{ Έτσι στο } D_f: f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4} = \frac{\sqrt{x}-2}{(x-1)(x-4)} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-1)(x-4)(\sqrt{x}+2)} =$$

$$= \frac{(\sqrt{x})^2 - 2^2}{(x-1)(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x-4}{(x-1)(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x}+2)}.$$

$$\text{Επομένως για } x \in (1,4) \cup (4,5): \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x}+2)} \stackrel{!!!}{=} \frac{1}{(4-1)(\sqrt{4}+2)} = \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}.$$

Σχόλιο: Αρχίσαμε τις «εκπτώσεις»; **Όχι.**

Απλά τώρα που μάλλον γνωρίζουμε τις υποχρεώσεις του εξεταζόμενου, θα πρέπει να ξεκαθαρίσουμε, ότι οφείλουμε να διαχειριστούμε το χρόνο μας την ημέρα των εξετάσεων, έτσι ώστε να απαντήσουμε «σωστά» στο μέγιστο πλήθος θεμάτων, με τη μέγιστη δυνατή (λόγω χρόνου) πληρότητα.

Γράφουμε «αραιά», όπου χρειάζεται, έτσι ώστε αν μας «περισσέψει» χρόνος, να επιστρέψουμε και να συμπληρώσουμε όσα μας «υποχρεώνει» το σχολικό βιβλίο.

$$\text{Συμπλήρωμα: } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 4} 1}{\lim_{x \rightarrow 4} [(x-1)(\sqrt{x}+2)]} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 4} (x-1) \cdot \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x}+2)} =$$

$$= \frac{1}{(4-1)(\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} + \lim_{x \rightarrow 4} 2)} = \frac{1}{3(\sqrt{\lim_{x \rightarrow 4} x} + 2)} = \frac{1}{3(\sqrt{4} + 2)} = \frac{1}{3(2+2)} = \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}$$

$$4. \text{ Αν } f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \leq 1 \\ 5x, & \text{αν } x > 1 \end{cases}, \text{ να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια: (i) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ και (ii) } \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

Λύση: (i) Για $x \in (-1,0) \cup (0,1)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^2 = 0$.

(ii) Για $x \in (0,1)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1^2 = 1$ και για $x \in (1,2)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (5x) = 5 \cdot 1 = 5$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \neq 5 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

$$5. \text{ Να βρείτε τα όρια: (i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x}, \text{ (ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\phi x}{x}, \text{ (iii) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \eta\mu x}{x} \right), \text{ (iv) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{\sqrt{5x+4}-2}.$$

Λύση: (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x}$. «Κοντά στο 0», $\frac{\eta\mu 3x}{x} = 3 \cdot \frac{\eta\mu 3x}{3x}$ και επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{3x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$,

$$\text{θα έχουμε: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(3 \cdot \frac{\eta\mu 3x}{3x} \right) = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{3x} = 3 \cdot 1 = 3.$$

Αν $u = 3x$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} u = \lim_{x \rightarrow 0} (3x) = 3 \cdot 0 = 0$. Άρα όταν $x \rightarrow 0$, τότε $u \rightarrow 0$.

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\phi x}{x}$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, δε μπορούμε να εργαστούμε, με την «Άλγεβρα των ορίων».

$$\text{«Κοντά στο 0», } \frac{\varepsilon\phi x}{x} = \frac{\eta\mu x}{x \cdot \sigma\upsilon\nu x} = \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1}{\lim_{x \rightarrow 0} \sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1, \text{ και επομένως } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\phi x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \eta\mu x}{x} \right)$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, δε μπορούμε να εργαστούμε, με την «Άλγεβρα των ορίων».

«Κοντά στο 0», $\frac{x - \eta\mu x}{x} = \frac{x}{x} - \frac{\eta\mu x}{x} = 1 - \frac{\eta\mu x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$,

και επομένως $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \eta\mu x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\eta\mu x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 - 1 = 0$.

(iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{\sqrt{5x+4}-2}$. Επειδή, «κοντά στο 0», όλα τα επιμέρους όρια υπάρχουν στο $\mathbb{R}$,

άρα $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{5x+4}-2) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{5x+4} - \lim_{x \rightarrow 0} 2 = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} (5x+4)} - 2 = \sqrt{5 \cdot 0 + 4} - 2 = \sqrt{4} - 2 = 2 - 2 = 0$

και έτσι δε μπορούμε να εργαστούμε, με την «Άλγεβρα των ορίων».

$$\begin{aligned} \text{«Κοντά στο 0», } \frac{\eta\mu 5x}{\sqrt{5x+4}-2} &= \frac{\eta\mu 5x \cdot (\sqrt{5x+4}+2)}{(\sqrt{5x+4}-2)(\sqrt{5x+4}+2)} = \\ &= \frac{\eta\mu 5x \cdot (\sqrt{5x+4}+2)}{(\sqrt{5x+4})^2 - 2^2} = \frac{\eta\mu 5x \cdot (\sqrt{5x+4}+2)}{5x+4-4} = \frac{\eta\mu 5x \cdot (\sqrt{5x+4}+2)}{5x} = \frac{\eta\mu 5x}{5x} (\sqrt{5x+4}+2). \end{aligned}$$

Επίσης, «κοντά στο 0», $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{5x} \stackrel{5x=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{5x+4}+2) = 2+2=4$.

[Αν $u = 5x$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} u = \lim_{x \rightarrow 0} (5x) = 5 \cdot 0 = 0$. Άρα όταν $x \rightarrow 0$, τότε $u \rightarrow 0$]

Επομένως $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{\sqrt{5x+4}-2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\eta\mu 5x}{5x} (\sqrt{5x+4}+2) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{5x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{5x+4}+2) = 1 \cdot 4 = 4$.

Σχόλιο: Η $f(x) = \frac{\eta\mu 5x}{\sqrt{5x+4}-2}$, ορίζεται «κοντά στο 0», αφού $D_f = \left[-\frac{4}{5}, 0 \right) \cup (0, +\infty)$.

Για να ορίζεται η f , «πρέπει και αρκεί» $\{5x+4 \geq 0 \text{ και } \sqrt{5x+4}-2 \neq 0\}$,

δηλαδή $\left\{ x \geq -\frac{4}{5} \text{ και } \sqrt{5x+4} \neq 2 \right\}$ και ισοδύναμα $\left\{ x \geq -\frac{4}{5} \text{ και } x \neq 0 \right\}$.

Στο $\left[-\frac{4}{5}, +\infty \right)$ έχουμε: $\sqrt{5x+4} = 2 \Leftrightarrow 5x+4 = 2^2 \Leftrightarrow 5x = 4-4 \Leftrightarrow 5x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

6. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, αν: (i) $1-x^2 \leq f(x) \leq 1+x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $1-x^4 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sin^2 x}$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$.

Λύση: (i) Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x^2) = 1-0^2 = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2) = 1+0^2 = 1$,

άρα $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x^2) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)$, και αφού $1-x^2 \leq f(x) \leq 1+x^2$ «κοντά στο 0»,

επομένως από το «κριτήριο παρεμβολής» $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

(ii) Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x^4) = 1-0^4 = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1}{\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x} = \frac{1}{\left(\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \right)^2} = \frac{1}{(\sin 0)^2} = \frac{1}{1^2} = 1$,

άρα $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x^4) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x}$, και αφού $1-x^4 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sin^2 x}$ «κοντά στο 0»,

επομένως από το «κριτήριο παρεμβολής» $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

7. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - 2}$.

Λύση: Επειδή η «εκφώνηση» λέει: «να βρείτε το όριο»,

μπορούμε να θεωρήσουμε δεδομένο ότι υπάρχει, και συνεπώς η $f(x) = \frac{x-1}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - 2}$,

καθώς και όλες οι επιμέρους συναρτήσεις, ορίζονται «κοντά στο 1».

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1} (x\sqrt{x} + \sqrt{x} - 2) = 0$, δε μπορούμε να εργαστούμε, με την «Άλγεβρα των ορίων».

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - 2} &= \frac{(x-1)(x\sqrt{x} + \sqrt{x} + 2)}{(x\sqrt{x} + \sqrt{x} - 2)(x\sqrt{x} + \sqrt{x} + 2)} = \frac{(x-1)(x\sqrt{x} + \sqrt{x} + 2)}{(x\sqrt{x} + \sqrt{x})^2 - 2^2} = \\ &= \frac{(x-1)(x\sqrt{x} + \sqrt{x} + 2)}{(x\sqrt{x})^2 + (\sqrt{x})^2 + 2x\sqrt{x}\sqrt{x} - 4} = \frac{(x-1)(x\sqrt{x} + \sqrt{x} + 2)}{x^2(\sqrt{x})^2 + x + 2x(\sqrt{x})^2 - 4} = \frac{(x-1)(x\sqrt{x} + \sqrt{x} + 2)}{x^2 \cdot x + x + 2x \cdot x - 4} = \\ &= \frac{(x-1)(x\sqrt{x} + \sqrt{x} + 2)}{x^3 + 2x^2 + x - 4} = \frac{\cancel{(x-1)}(x\sqrt{x} + \sqrt{x} + 2)}{\cancel{(x-1)}(x^2 + 3x + 4)} = \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x} + 2}{x^2 + 3x + 4} \end{aligned}$$

1	2	1	-4	1
	1	3	4	
1	3	4	0	

$$\text{Αφού } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3x + 4) = 1^2 + 3 \cdot 1 + 4 = 8 \neq 0,$$

$$\text{άρα } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x} + 2}{x^2 + 3x + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x\sqrt{x} + \sqrt{x} + 2)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3x + 4)} = \frac{1\sqrt{1} + \sqrt{1} + 2}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Σχόλιο: Η λύση που δώσαμε δεν είναι η «καλύτερη».

Επίσης παραλείψαμε να συμπληρώσουμε, ότι «κοντά στο 1» $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} x} = \sqrt{1} = 1$

και επομένως $\lim_{x \rightarrow 1} (x\sqrt{x} + \sqrt{x} - 2) = \lim_{x \rightarrow 1} (x\sqrt{x}) + \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} - \lim_{x \rightarrow 1} 2 = \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} + 1 - 2 = 1 \cdot 1 - 1 = 1 - 1 = 0$.

Στη δεύτερη λύση, θα διδαχθούμε ότι αν μάθουμε να «ξεχωρίζουμε» τις σύνθετες συναρτήσεις, θα μπορέσουμε να δώσουμε πιο απλές λύσεις.

2η Λύση: «Κοντά στο 1» $\frac{x-1}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - 2} = \frac{(\sqrt{x})^2 - 1}{(\sqrt{x})^2 \sqrt{x} + \sqrt{x} - 2} = \frac{(\sqrt{x})^2 - 1}{(\sqrt{x})^3 + \sqrt{x} - 2} \stackrel{\sqrt{x}=t}{=} \frac{t^2 - 1}{t^3 + t - 2} =$

$$= \frac{\cancel{(t-1)}(t+1)}{\cancel{(t-1)}(t^2 + t + 2)} = \frac{t+1}{t^2 + t + 2}. \text{ Έτσι } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - 2} \stackrel{\sqrt{x}=t}{=} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t+1}{t^2 + t + 2} = \frac{1+1}{1^2 + 1 + 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Αν $t = \sqrt{x}$, τότε $\lim_{x \rightarrow 1} t = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} x} = \sqrt{1} = 1$. Άρα όταν $x \rightarrow 1$, τότε $t \rightarrow 1$.

$$t^3 + t - 2 = 1 \cdot t^3 + 0 \cdot t^2 + 1 \cdot t + (-2) = (t-1)(t^2 + t + 2) \quad \begin{array}{l} \text{«Σχήμα} \\ \text{Horner»} \end{array}$$

1	0	1	-2	1
	1	1	2	
1	1	2	0	

8. Να βρείτε τα όρια: (i) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{|x-5| + x^2 - 4x - 5}{x-5}$, (ii) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{|x-5| + x^2 - 4x - 5}{x-5}$.

Λύση: Η $f(x) = \frac{|x-5| + x^2 - 4x - 5}{x-5}$, έχει προφανώς $D_f = \mathbb{R} - \{5\} = (-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$.

(i) Για $x \in (-\infty, 5)$: $x \in (-\infty, 5) \Rightarrow x < 5 \Rightarrow x-5 < 0 \Rightarrow |x-5| = -(x-5) \Rightarrow \frac{|x-5| + x^2 - 4x - 5}{x-5} =$

$$= \frac{-(x-5) + (x-5)(x+1)}{x-5} = \frac{\cancel{(x-5)}(-1+x+1)}{\cancel{x-5}} = x \text{ και συνεπώς } \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{|x-5| + x^2 - 4x - 5}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5^-} x = 5.$$

(ii) Για $x \in (5, +\infty)$: $x \in (5, +\infty) \Rightarrow x > 5 \Rightarrow x - 5 > 0 \Rightarrow |x - 5| = x - 5 \Rightarrow \frac{|x - 5| + x^2 - 4x - 5}{x - 5} =$
 $= \frac{(x - 5) + (x - 5)(x + 1)}{x - 5} = \frac{\cancel{(x - 5)}(1 + x + 1)}{\cancel{x - 5}} = x + 2$ και $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{|x - 5| + x^2 - 4x - 5}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5^+} (x + 2) = 7$.

9. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, αν: (i) $\lim_{x \rightarrow 1} (4f(x) + 2 - 4x) = -10$, (ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 1$.

Λύση: (i) Αν $g(x) = 4f(x) + 2 - 4x$, τότε $4f(x) = g(x) - 2 + 4x$ και συνεπώς $f(x) = \frac{g(x) - 2 + 4x}{4}$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -10$, $\lim_{x \rightarrow 1} 2 = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1} 4 = 4$ και $\lim_{x \rightarrow 1} (4x) = 4 \cdot 1 = 4$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - 2 + 4x}{4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} [g(x) - 2 + 4x]}{\lim_{x \rightarrow 1} 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} g(x) - \lim_{x \rightarrow 1} 2 + \lim_{x \rightarrow 1} (4x)}{4} = \frac{-10 - 2 + 4}{4} = \frac{-8}{4} = -2.$$

(ii) «Κοντά στο 1». Αν $g(x) = \frac{f(x)}{x - 1}$, τότε $f(x) = (x - 1)g(x)$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 1 - 1 = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [(x - 1)g(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0 \cdot 1 = 0.$$

10. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 1| - 5x + 7}{x - 2}$.

Λύση: Επειδή $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 2 - 2 = 0$, δε μπορούμε να εργαστούμε, με την «Άλγεβρα των ορίων».

Αφού $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1) = 2^2 - 1 = 3 > 0$, επομένως $x^2 - 1 > 0$, «κοντά στο 2».

Έτσι, «κοντά στο 2» θα έχουμε: $|x^2 - 1| = x^2 - 1$,

και συνεπώς $\frac{|x^2 - 1| - 5x + 7}{x - 2} = \frac{x^2 - 1 - 5x + 7}{x - 2} = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \frac{\cancel{(x - 2)}(x - 3)}{\cancel{x - 2}} = x - 3$.

Άρα, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 1| - 5x + 7}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 3) = 2 - 3 = -1$.

11. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{\eta \mu x}$.

Λύση: Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} \eta \mu x = \eta \mu 0 = 0$, δε μπορούμε να εργαστούμε, με την «Άλγεβρα των ορίων».

Όμως, «κοντά στο 0» έχουμε: $\frac{\sin x - 1}{\eta \mu x} = \frac{\frac{\sin x - 1}{x}}{\frac{\eta \mu x}{x}}$, και επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 0$,

τελικά: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{\eta \mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x - 1}{x}}{\frac{\eta \mu x}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x}} = \frac{0}{1} = 0$.

12. Αν $D_f = \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(2x + 1) = 5$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

Λύση: $5 = \lim_{x \rightarrow 1} f(2x + 1) \stackrel{2x+1=u}{=} \lim_{u \rightarrow 3} f(u)$ και συνεπώς $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$.

Αν $u = 2x + 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow 1} u = \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$. Άρα όταν $x \rightarrow 1$, τότε $u \rightarrow 3$.

Προσοχή: Όταν θέσαμε $u = 2x + 1$, κάναμε «αλλαγή μεταβλητής». (σύνθετη συνάρτηση)

Όταν λέμε: $\lim_{u \rightarrow 3} f(u) = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$, κάνουμε απλά «αλλαγή ονόματος μεταβλητής».