

ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ στο $x_0 \in \mathbb{R}$

1. Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο της f στο x_0 όταν:

(i) $f(x) = \frac{x+5}{x^4+3x^2}$, $x_0 = 0$, (ii) $f(x) = \frac{2x-3}{4(x-1)^4}$, $x_0 = 1$, (iii) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}$, $x_0 = 0$.

Λύση: (i) $f(x) = \frac{x+5}{x^4+3x^2}$. $x^4+3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, και επομένως $D_f = \mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Αφού η συνάρτηση ορίζεται «κοντά στο 0», μπορούμε να αναζητήσουμε το όριό της, στο $x_0 = 0$.
Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} (x^4 + 3x^2) = 0^4 + 3 \cdot 0^2 = 0$, δε μπορούμε να εργαστούμε, με την «Άλγεβρα των ορίων».

Επίσης $\lim_{x \rightarrow 0} (x+5) = 0+5 = 5 \neq 0$, και έτσι

δεν υπάρχει το ενδεχόμενο να προκύψει, με επεξεργασία, συνάρτηση ίση με την f , «κοντά στο 0», απαλλαγμένη από το πρόβλημα «οριακά μηδενιζόμενου» παρονομαστή.

Όμως $x^4 + 3x^2 > 0$, «κοντά στο 0», $\lim_{x \rightarrow 0} (x^4 + 3x^2) = 0$, και συνεπώς $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4 + 3x^2} = +\infty$.

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+5}{x^4+3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(x+5) \cdot \frac{1}{x^4+3x^2} \right] \stackrel{\langle 5 \cdot (+\infty) \rangle}{=} +\infty.$$

Συμπλήρωμα: $x^4 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Στο $\mathbb{R}$ ισχύουν προφανώς: $x^4 \geq 0$ και $3x^2 \geq 0$, και επομένως $x^4 + 3x^2 \geq 0$.

«Κοντά στο 0» ισχύει: $x \neq 0$, επομένως $x^4 + 3x^2 \neq 0$, και συνεπώς $x^4 + 3x^2 > 0$.

(ii) $f(x) = \frac{2x-3}{4(x-1)^4}$. $4(x-1)^4 = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, και επομένως $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Αφού η συνάρτηση ορίζεται «κοντά στο 1», μπορούμε να αναζητήσουμε το όριό της, στο $x_0 = 1$.

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow 1} [4(x-1)^4] = 4 \cdot \left[\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \right]^4 = 4 \cdot (1-1)^4 = 4 \cdot 0^4 = 0,$$

δε μπορούμε να εργαστούμε, με την «Άλγεβρα των ορίων», και αφού $\lim_{x \rightarrow 1} (2x-3) = 2 \cdot 1 - 3 = -1 \neq 0$,

$$\text{θα αναζητήσουμε το όριο της } f, \text{ στη μορφή } f(x) = \frac{2x-3}{4(x-1)^4} = (2x-3) \cdot \frac{1}{4(x-1)^4}.$$

Προφανώς $4(x-1)^4 > 0$, «κοντά στο 1», και αφού $\lim_{x \rightarrow 1} [4(x-1)^4] = 0$, ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{4(x-1)^4} = +\infty$.

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left[(2x-3) \cdot \frac{1}{4(x-1)^4} \right] \stackrel{\langle -1 \cdot (+\infty) \rangle}{=} -\infty.$$

(iii) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}$. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, και επομένως $D_f = \mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Αφού η συνάρτηση ορίζεται «κοντά στο 0», μπορούμε να αναζητήσουμε το όριό της, στο $x_0 = 0$.

Επειδή **δεν υπάρχει** το όριο της $g(x) = \frac{1}{x}$, στο $x_0 = 0$, δε μπορούμε να αναζητήσουμε το όριο της f , με τις γνωστές ιδιότητες των ορίων, αν δεν «επεξεργαστούμε» τον τύπο της.

$$\text{Στο } (-\infty, 0), \text{ έχουμε } x < 0, \text{ επομένως } |x| = -x, \text{ και συνεπώς } f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x} - \frac{1}{-x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x}.$$

$$\text{Στο } (0, +\infty), \text{ έχουμε } x > 0, \text{ επομένως } |x| = x, \text{ και συνεπώς } f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(2 \cdot \frac{1}{x} \right) \stackrel{\langle 2 \cdot (-\infty) \rangle}{=} -\infty \neq 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \text{ και δεν υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\lambda-1)x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$.

Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \in \mathbb{R}$.

Λύση: $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$, και επομένως $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

Αφού η συνάρτηση ορίζεται «κοντά στο 1», μπορούμε να αναζητήσουμε το όριό της, στο $x_0 = 1$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 1^2 - 1 = 0$:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	$+$	0	$-$	0

❖ Στο $(-1, 1)$, έχουμε $x^2 - 1 < 0$ και επομένως $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty$.

❖ Στο $(1, +\infty)$, έχουμε $x^2 - 1 > 0$ και επομένως $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty$.

Επίσης $\lim_{x \rightarrow 1} [(\lambda-1)x^2 + x - 2] = (\lambda-1) \cdot 1^2 + 1 - 2 = \lambda - 1 + 1 - 2 = \lambda - 2$, **δηλαδή** $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lambda - 2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

➤ Αν $\lambda - 2 \neq 0$, θέτουμε $f(x) = [(\lambda-1)x^2 + x - 2] \cdot \frac{1}{x^2 - 1}$, και έχουμε :

(a) Για $\lambda - 2 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 2$: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \stackrel{\langle (\lambda-2)(-\infty) \rangle}{=} \stackrel{\lambda-2 > 0}{=} -\infty \neq +\infty \stackrel{\langle (\lambda-2)(+\infty) \rangle}{=} \stackrel{\lambda-2 > 0}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

(b) Για $\lambda - 2 < 0 \Leftrightarrow \lambda < 2$: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \stackrel{\langle (\lambda-2)(-\infty) \rangle}{=} \stackrel{\lambda-2 < 0}{=} +\infty \neq -\infty \stackrel{\langle (\lambda-2)(+\infty) \rangle}{=} \stackrel{\lambda-2 < 0}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

Επομένως για $\lambda - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 2$, δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

➤ Αν $\lambda - 2 = 0$, τότε $\lambda = 2$ και $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{x+2}{x+1}$.

Έτσι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2} \in \mathbb{R}$, και συνεπώς ο ζητούμενος αριθμός είναι ο $\lambda = 2$.

3. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, όταν :

(i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-4}{f(x)} = +\infty$, (ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x+2} = -\infty$, (iii) $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) \cdot (3x^2 - 2)] = +\infty$.

Λύση: (i) Θέτουμε $g(x) = \frac{x-4}{f(x)}$ και επειδή $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$, θα έχουμε: $g(x) > 0$ «κοντά στο 1».

Έτσι «κοντά στο 1», $f(x) = \frac{x-4}{g(x)} = (x-4) \cdot \frac{1}{g(x)}$, και αφού $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{g(x)} = 0$,

θα έχουμε : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left[(x-4) \cdot \frac{1}{g(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} (x-4) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{g(x)} = (1-4) \cdot 0 = 0$.

(ii) Θέτουμε $g(x) = \frac{f(x)}{x+2}$ και έχουμε: $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -\infty$ και $f(x) = (x+2) \cdot g(x)$, «κοντά στο 1».

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 1+2 = 3 > 0$, θα έχουμε : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [(x+2) \cdot g(x)] \stackrel{\langle 3(-\infty) \rangle}{=} -\infty$.

(iii) Θέτουμε $g(x) = f(x) \cdot (3x^2 - 2)$ και έχουμε: $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$ και $f(x) = \frac{g(x)}{3x^2 - 2}$, «κοντά στο 1»,

αφού $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2) = 3 \cdot 1^2 - 2 = 1 > 0 \Rightarrow \{3x^2 - 2 > 0, \text{ «κοντά στο 1»}\}$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{3x^2 - 2} = \frac{1}{1} = 1$, θα έχουμε : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left[g(x) \cdot \frac{1}{3x^2 - 2} \right] \stackrel{\langle (+\infty) \cdot 1 \rangle}{=} +\infty$.