

ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

1. Να βρείτε τα όρια: (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{5}{x+2} \right)$, (ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+5}{x} - \frac{x^2+3}{x+2} \right)$.

Λύση: (i) Για την $f(x) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{5}{x+2}$, προφανώς $D_f = \mathbb{R} - \{-2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$

και επομένως η f , ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$, π.χ. το $(-2, +\infty)$.

Θα εργαστούμε στο διάστημα $(0, +\infty) \subseteq D_f$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 \cdot \frac{1}{x} \right) = 5 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 5 \cdot 0 = 0$,

$$\text{άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{5}{x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+1} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x+2} = 0 - 0 = 0.$$

Σχόλιο: (1) Όταν τα επιμέρους όρια υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί,

και δεν προκύπτει «απροσδιόριστη μορφή», μπορούμε να αξιοποιούμε την «Άλγεβρα ορίων».

(2) Επιλέγουμε σα «διάστημα εργασίας» υποσύνολο του $(0, +\infty)$ όταν $x \rightarrow +\infty$,

και υποσύνολο του $(-\infty, 0)$ όταν $x \rightarrow -\infty$, για το «φόβο» του $\frac{1}{x}$.

(ii) Για την $f(x) = \frac{x^2+5}{x} - \frac{x^2+3}{x+2}$, προφανώς $D_f = \mathbb{R} - \{-2, 0\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, +\infty)$

και επομένως η f , ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(-\infty, a)$, [με $a \leq 0$], π.χ. το $(-\infty, -2)$.

Στο $(-\infty, -2)$, επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+5}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+3}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$,

αντιμετωπίζουμε **απροσδιόριστη μορφή** « $(-\infty) - (-\infty)$ ».

$$\text{Όμως } \frac{x^2+5}{x} - \frac{x^2+3}{x+2} = \frac{(x^2+5) \cdot (x+2) - (x^2+3) \cdot x}{x \cdot (x+2)} = \frac{\cancel{x^3} + 5x + 2x^2 + 10 - \cancel{x^3} - 3x}{x^2 + 2x} = \frac{2x^2 + 2x + 10}{x^2 + 2x}$$

$$\text{και επειδή } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 2x + 10}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+5}{x} - \frac{x^2+3}{x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 2x + 10}{x^2 + 2x} = 2.$$

Σχόλιο: Επειδή μας ζητάνε να βρούμε το όριο, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι υπάρχει,

ότι επομένως η συνάρτηση ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(-\infty, a)$, με $a \leq 0$, και συνεπώς :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+5}{x} - \frac{x^2+3}{x+2} \right) &\stackrel{\langle (-\infty) - (-\infty) \rangle}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2+5) \cdot (x+2) - (x^2+3) \cdot x}{x \cdot (x+2)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^3} + 5x + 2x^2 + 10 - \cancel{x^3} - 3x}{x^2 + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 2x + 10}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2 \end{aligned}$$

Το σύμβολο « $(-\infty) - (-\infty)$ », πάνω από το $(=)$, δηλώνει τη διαπίστωση **απροσδιόριστης μορφής**,

και δικαιολογεί την επεξεργασία του τύπου της συνάρτησης.

2. Να βρείτε τα όρια: (i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+10x+9}$, (ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-3x+2} \right)$,

(iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1} \right)$, (iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - 1 - \sqrt{x^2-4x+3} \right)$.

Λύση: (i) Για την $f(x) = \sqrt{x^2+10x+9}$, θα έχουμε $D_f = (-\infty, -9] \cup [-1, +\infty)$,

και επομένως η f , ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(-\infty, a)$, με $a \leq 0$, π.χ. το $(-\infty, -9)$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2+10x+9) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$, στο $(-\infty, -9)$ θα έχουμε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+10x+9} = +\infty$.

Συμπλήρωμα: $x^2 + 10x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x+9)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \{x+9=0 \text{ ή } x+1=0\} \Leftrightarrow \{x=-9 \text{ ή } x=-1\}$

Για να ορίζεται η f , «πρέπει και αρκεί»

$x^2 + 10x + 9 \geq 0$, δηλαδή $x \leq -9$ ή $x \geq -1$.

x	$-\infty$	-9	-1	$+\infty$	
$x^2+10x+9$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$

(ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 3x + 2})$.

Για την $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$, θα έχουμε $D_f = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$,

και επομένως η f , ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$, με $a \geq 0$, π.χ. το $(2, +\infty)$.

Με **διάστημα εργασίας** το $(2, +\infty)$: Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, θα έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, θα έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 2} = +\infty$.

Επομένως $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 3x + 2}) \stackrel{\langle (+\infty) + (+\infty) \rangle}{=} +\infty$.

Συμπλήρωμα: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει: $x^2 \geq 0$ και $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1 > 0 \Rightarrow x^2 + 1 > 0$

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \{x-1=0 \text{ ή } x-2=0\} \Leftrightarrow \{x=1 \text{ ή } x=2\}$

Έτσι για να ορίζεται η f , «πρέπει και αρκεί»

$x^2 - 3x + 2 \geq 0$, δηλαδή $x \leq 1$ ή $x \geq 2$.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
x^2-3x+2	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$

Σχόλιο: Δεν αντιμετωπίζαμε **απροσδιόριστη μορφή**,

και έτσι η επεξεργασία του τύπου της συνάρτησης, ήταν προφανώς περιττή.

(iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1})$.

Για την $f(x) = \sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1}$, θα έχουμε προφανώς $D_f = \mathbb{R}$,

και επομένως η f , ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$, με $a \geq 0$, π.χ. το $(0, +\infty)$.

Με **διάστημα εργασίας** το $(0, +\infty)$: Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, θα έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2} = +\infty$,

και επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, θα έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$,

και επομένως αντιμετωπίζουμε **απροσδιόριστη μορφή** $\langle (+\infty) - (+\infty) \rangle$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1} &= \frac{(\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1})(\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{(x^2 + 2) - (x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x^2 + 2 - x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 1}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 1}}. \text{ Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 1}) \stackrel{\langle (+\infty) + (+\infty) \rangle}{=} +\infty, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 1}} = 0, \end{aligned}$$

και συνεπώς $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 1}} = 0$.

Σχόλιο: Ας δούμε τι θα είχε συμβεί, αν επεξεργαζόμαστε τον τύπο της f με «κοινό παράγοντα»,

προκειμένου να αντιμετωπισθεί η **απροσδιοριστία**.

$$\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)} - \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = |x| \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} - |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = |x| \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |x| = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2}} - \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}} = \sqrt{1 + 0} - \sqrt{1 + 0} = 0$$

Παρατηρούμε, μετατόπιση του προβλήματος **απροσδιοριστίας**.

Από το $\langle (+\infty) - (+\infty) \rangle$, οδηγηθήκαμε στο $\langle (+\infty) \cdot 0 \rangle$.

Προφανώς, αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο x^2 , είχε και στις δυο παραστάσεις τον ίδιο συντελεστή.

«Επί της ουσίας», το πρόβλημα αυτό δεν υπάρχει, στην επόμενη άσκηση.

(iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1 - \sqrt{x^2 - 4x + 3})$.

Για την $f(x) = 2x - 1 - \sqrt{x^2 - 4x + 3}$, θα έχουμε $D_f = (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$,
και επομένως η f , ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$, με $\alpha \geq 0$, π.χ. το $(3, +\infty)$.

Στο $(3, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x) \stackrel{\langle 2 \cdot (+\infty) \rangle}{=} +\infty$ και επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 4x + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ θα έχουμε
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 4x + 3} = +\infty$, με συνέπεια, να αντιμετωπίζουμε **απροσδιόριστη μορφή** $\langle (+\infty) - (+\infty) \rangle$.

$$\begin{aligned} \text{Όμως, στο } (3, +\infty) \text{ έχουμε: } 2x - 1 - \sqrt{x^2 - 4x + 3} &= 2x - 1 - \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right)} = \\ &= 2x - 1 - |x| \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} \stackrel{x > 3}{=} 2x - 1 - x \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = x \left(2 - \frac{1}{x} - \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}\right) \end{aligned}$$

$$\text{και συνεπώς } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1 - \sqrt{x^2 - 4x + 3}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(2 - \frac{1}{x} - \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}\right) \right] \stackrel{\langle (+\infty) \cdot 1 \rangle}{=} +\infty.$$

Συμπλήρωμα: $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \{x - 1 = 0 \text{ ή } x - 3 = 0\} \Leftrightarrow \{x = 1 \text{ ή } x = 3\}$

Έτσι για να ορίζεται η f , «πρέπει και αρκεί»

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0, \text{ δηλαδή } x \leq 1 \text{ ή } x \geq 3.$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$		
x^2-4x+3		+	0	-	0	+

Έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 4 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 4 \cdot 0 = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2} = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 3 \cdot 0 = 0$ και επομένως

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x} - \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2}} = 2 - 0 - \sqrt{1 - 0 + 0} = 2 - 1 = 1.$$

Σχόλια: (1) Αν μας ζητούσαν το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1 - \sqrt{4x^2 - 4x + 3}) \stackrel{[2 = \sqrt{4}]}{=}$, δε θα μπορούσαμε να εργαστούμε
έτσι, αφού θα είχαμε μετατόπιση της **απροσδιοριστίας**, από το $\langle (+\infty) - (+\infty) \rangle$, στο $\langle (+\infty) \cdot 0 \rangle$.

(a) **Διαφορά**, με $x \rightarrow +\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\boxed{2} \cdot x - 1 \boxed{-} \sqrt{\boxed{1} \cdot x^2 - 4x + 3} \right)$ με «κοινό παράγοντα».

(b) **Διαφορά**, με $x \rightarrow +\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\boxed{2} \cdot x - 1 \boxed{-} \sqrt{\boxed{4} \cdot x^2 - 4x + 3} \right)$ με «συζυγή παράσταση».

(c) **Άθροισμα** με $x \rightarrow -\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\boxed{2} \cdot x - 1 \boxed{+} \sqrt{\boxed{1} \cdot x^2 - 4x + 3} \right)$ με «κοινό παράγοντα»

(2) Επιλέγοντας σα «**διάστημα εργασίας**» υποσύνολο του $(0, +\infty)$ όταν $x \rightarrow +\infty$,

και υποσύνολο του $(-\infty, 0)$ όταν $x \rightarrow -\infty$, λύνουμε και το πρόβλημα αντικατάστασης του $|x|$.

3. Να βρείτε τα όρια: (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$ και (ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{2x - \sqrt{x^2 + 1}}$.

Λύση: (i) Η $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$, ορίζεται στο $(0, +\infty)$, αφού προφανώς $D_f = \mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$, επίσης $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

και έτσι αντιμετωπίζουμε **απροσδιόριστη μορφή** $\langle \frac{+\infty}{+\infty} \rangle$.

Όμως για $x > 0$ έχουμε :

$$\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x} \stackrel{x \in (0, +\infty)}{=} x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{1 + 0} = 1.$$

(ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{2x - \sqrt{x^2 + 1}}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$: $x^2 \geq 0$ και επομένως $x^2 + 1 \geq 1 > 0$.

Η $f(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{2x - \sqrt{x^2 + 1}}$, ορίζεται στο $(1, +\infty)$, αφού εκεί : $x^2 - 1 > 0$ και $2x - \sqrt{x^2 + 1} = 0$ αδύνατη*.

Έχουμε : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 1} = +\infty$ αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 \pm 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$.

Έτσι, αντιμετωπίζουμε **απροσδιόριστη μορφή** « $(+\infty) - (+\infty)$ », στον αριθμητή και στον παρονομαστή.

$$\frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{2x - \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x - \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}}{2x - \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}} \stackrel{x \in (1, +\infty)}{=} \frac{x - x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{2x - x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{x \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)}{x \left(2 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{2 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \text{ και}$$

$$\text{επομένως } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{2x - \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{2 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}}} = \frac{1 - \sqrt{1 - 0}}{2 - \sqrt{1 + 0}} = \frac{1 - 1}{2 - 1} = \frac{0}{1} = 0.$$

* Για $x \in (1, +\infty)$: $2x - \sqrt{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow 2x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow 4x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow 3x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, έτσι η $2x - \sqrt{x^2 + 1} = 0$ είναι αδύνατη στο $(1, +\infty)$, αφού $\frac{\sqrt{3}}{3} < 1$.

$$\frac{\sqrt{3}}{3} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{3} < 3 \Leftrightarrow 3 < 9$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$		+	0	-

«2^η Λύση»: Για όσους θέλουν επεξεργασία **πάντα** με «συζυγή», και «λατρεύουν» το σύμβολο $\lim_{x \rightarrow +\infty}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{2x - \sqrt{x^2 + 1}} &\stackrel{\text{«} (+\infty) - (+\infty) \text{»}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1})(2x + \sqrt{x^2 + 1})}{(2x - \sqrt{x^2 + 1})(2x + \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 - 1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[x^2 - (x^2 - 1)](2x + \sqrt{x^2 + 1})}{[4x^2 - (x^2 + 1)](x + \sqrt{x^2 - 1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 + 1}}{(3x^2 - 1)(x + \sqrt{x^2 - 1})} \stackrel{\text{«} \frac{+\infty}{+\infty} \text{»}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)}{x \left(3x - \frac{1}{x}\right)(x + \sqrt{x^2 - 1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{\left(3x - \frac{1}{x}\right)(x + \sqrt{x^2 - 1})} \stackrel{\text{«} \frac{3}{+\infty} \text{»}}{=} 0 \end{aligned}$$

Σχόλιο: Φανταστείτε να γράψουμε και το συμπλήρωμα.

4. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 - 5x| + x}{x^2 - 3x + 2}$.

Λύση: Για την $f(x) = \frac{|x^2 - 5x| + x}{x^2 - 3x + 2}$, θα έχουμε $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$,

αφού $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \{x - 1 = 0 \text{ ή } x - 2 = 0\} \Leftrightarrow \{x = 1 \text{ ή } x = 2\}$,

και επομένως η f , ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(-\infty, \alpha)$, με $\alpha \leq 0$, π.χ. το $(-\infty, 0)$.

$$x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή } \\ x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή } \\ x = 5 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	5	$+\infty$
$x^2 - 5x$		+	0	-

Για $x \in (-\infty, 0) \subseteq D_f$, $x^2 - 5x > 0$, επομένως $|x^2 - 5x| = x^2 - 5x$ και συνεπώς $f(x) = \frac{x^2 - 5x + x}{x^2 - 3x + 2}$.

$$\text{Έτσι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 - 5x| + x}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1.$$

5. Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του λ , να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

$$(i) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} + \lambda x), \quad (ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda-1)x^3 + 2x^2 + 3}{\lambda x^2 - 5x + 6}.$$

Λύση: (i) Προφανώς για την $f(x) = \sqrt{x^2+1} + \lambda x$, θα έχουμε $D_f = \mathbb{R}$

και επομένως η f , ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(-\infty, \alpha)$, με $\alpha \leq 0$, π.χ. το $(-\infty, 0)$.

$$\text{Έχουμε: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2+1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\lambda x) = \begin{cases} -\infty, \text{ αν } \lambda > 0 \\ 0, \text{ αν } \lambda = 0 \\ +\infty, \text{ αν } \lambda < 0 \end{cases}.$$

Επειδή για $\lambda > 0$ αντιμετωπίζουμε **απροσδιόριστη μορφή** « $(+\infty) + (-\infty)$ »,

θα κάνουμε μια επεξεργασία του τύπου της f , με «κοινό παράγοντα», για όλα τα $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{Για } x \in (-\infty, 0): \sqrt{x^2+1} + \lambda x = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} + \lambda x = |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \lambda x \stackrel{x < 0}{\underset{|x| = -x}{=}} -x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \lambda x = -x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \lambda \right)$$

$$\text{και έχουμε } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \lambda \right) = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \lambda = \sqrt{1+0} - \lambda = 1 - \lambda.$$

(α) Αν $1 - \lambda = 0$, δηλαδή αν $\lambda = 1$, τότε :

$$\sqrt{x^2+1} + \lambda x = \sqrt{x^2+1} + x = \frac{(\sqrt{x^2+1} + x)(\sqrt{x^2+1} - x)}{\sqrt{x^2+1} - x} = \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2+1} - x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + (-x)}$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2+1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$, άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ και αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$, άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$.

$$\text{Έτσι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\sqrt{x^2+1} + (-x) \right] \stackrel{\text{«}(\infty)(\infty)\text{»}}{=} +\infty \text{ και επομένως } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} + \lambda x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + (-x)} = 0.$$

(β) Αν $1 - \lambda \neq 0$, δηλαδή αν $\lambda \neq 1$, τότε :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Αν } 1 - \lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < 1: \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} + \lambda x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(-x) \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \lambda \right) \right] \stackrel{\text{«}(\infty)(1-\lambda)\text{»}}{=} \stackrel{1-\lambda > 0}{=} +\infty \\ \text{Αν } 1 - \lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > 1: \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} + \lambda x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(-x) \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \lambda \right) \right] \stackrel{\text{«}(\infty)(1-\lambda)\text{»}}{=} \stackrel{1-\lambda < 0}{=} -\infty \end{array} \right.$$

Σχόλιο: Όταν μια συνάρτηση έχει όριο $(\pm\infty)$ και μια άλλη ένα πραγματικό αριθμό μ ,

κρίσιμο για το όριο του γινομένου των συναρτήσεων, είναι το αν $\mu=0$ ή $\mu \neq 0$,

αφού για $\mu=0$, αντιμετωπίζουμε **απροσδιόριστη μορφή** « $(+\infty) \cdot 0$ ».

(ii) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\lambda-1)x^3 + 2x^2 + 3}{\lambda x^2 - 5x + 6}$, ορίζεται σε διάστημα $(\alpha, +\infty) \subseteq (0, +\infty)$.

❖ Αν $\lambda \neq 0$ και εξασφαλίζει $\Delta < 0$ στο $\lambda x^2 - 5x + 6$, τότε $D_f = \mathbb{R}$ και επιλέγουμε π.χ. το $(0, +\infty)$.

Αν $\lambda \neq 0$ και εξασφαλίζει $\Delta \geq 0$ στο $\lambda x^2 - 5x + 6$, αν ρ είναι η διπλή ρίζα ή η μεγαλύτερη ρίζα, για $\rho \leq 0$ επιλέγουμε π.χ. το $(0, +\infty) \subseteq D_f$, ενώ για $\rho > 0$ επιλέγουμε π.χ. το $(\rho, +\infty) \subseteq D_f$.

❖ Αν $\lambda = 0$, τότε $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{6}{5} \right\}$ και επιλέγουμε π.χ. το $\left(\frac{6}{5}, +\infty \right)$.

(α) Αν $\lambda - 1 = 0$, δηλαδή αν $\lambda = 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda-1)x^3 + 2x^2 + 3}{\lambda x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2.$

(β) Αν $\lambda = 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda-1)x^3 + 2x^2 + 3}{\lambda x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3 + 2x^2 + 3}{-5x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3}{-5x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5} \cdot x^2 \right) \stackrel{\text{«}\frac{1}{5}(\infty)\text{»}}{=} +\infty.$

$$(γ) \text{ Av } \begin{cases} \lambda \neq 1 \\ \text{και} \\ \lambda \neq 0 \end{cases} : \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda-1)x^3 + 2x^2 + 3}{\lambda x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda-1)x^3}{\lambda x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lambda-1}{\lambda} \cdot x \right)^{\left(\frac{\lambda-1}{\lambda} \right) \cdot (+\infty)} = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \lambda < 0 \text{ ή } \lambda > 1 \\ -\infty, & \text{αν } 0 < \lambda < 1 \end{cases}$$

λ	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\frac{\lambda-1}{\lambda}$		+	-	+

Έτσι για $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, θα έχουμε $\frac{\lambda-1}{\lambda} > 0$,

ενώ για $\lambda \in (0, 1)$, θα έχουμε $\frac{\lambda-1}{\lambda} < 0$.

6. Να προσδιορίσετε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + \lambda x + 10} - \lambda x)$ να υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

Λύση: Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + \lambda x + 10} - \lambda x$,

ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(\delta, +\infty)$ με $\delta \geq 0$.

➤ Αν το $\lambda \in \mathbb{R}$ εξασφαλίζει $\Delta \leq 0$ στο $1 \cdot x^2 + \lambda x + 10$, τότε το τριώνυμο δεν είναι ποτέ «ετερόσημο του $a=1$ », δηλαδή αρνητικό, επομένως $D_f = \mathbb{R}$ και επιλέγουμε π.χ. το $(0, +\infty)$.

➤ Αν το $\lambda \in \mathbb{R}$ εξασφαλίζει $\Delta > 0$ στο $1 \cdot x^2 + \lambda x + 10$, τότε το τριώνυμο είναι «εκτός των ριζών» «ομόσημο του $a=1$ », δηλαδή θετικό, και αν ρ είναι η μεγαλύτερη ρίζα, για $\rho \leq 0$ επιλέγουμε π.χ. το $(0, +\infty) \subseteq D_f$, ενώ για $\rho > 0$ επιλέγουμε π.χ. το $(\rho, +\infty) \subseteq D_f$.

$$\text{Έχουμε: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + \lambda x + 10} = +\infty \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \lambda x + 10) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\lambda x) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \lambda > 0 \\ 0, & \text{αν } \lambda = 0 \\ -\infty, & \text{αν } \lambda < 0 \end{cases}.$$

Επειδή για $\lambda > 0$ αντιμετωπίζουμε **απροσδιόριστη μορφή** $\langle (+\infty) - (+\infty) \rangle$,

θα κάνουμε μια επεξεργασία του τύπου της f , με «κοινό παράγοντα», για όλα τα $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\sqrt{x^2 + \lambda x + 10} - \lambda x = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{\lambda}{x} + \frac{10}{x^2} \right)} - \lambda x = |x| \sqrt{1 + \frac{\lambda}{x} + \frac{10}{x^2}} - \lambda x \stackrel{x > \delta \geq 0}{=} x \sqrt{1 + \frac{\lambda}{x} + \frac{10}{x^2}} - \lambda x = x \left(\sqrt{1 + \frac{\lambda}{x} + \frac{10}{x^2}} - \lambda \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{\lambda}{x} + \frac{10}{x^2}} - \lambda \right) = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10}{x^2}} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda = \sqrt{1 + 0 + 0} - \lambda = 1 - \lambda$$

(α) Αν $1 - \lambda \neq 0$, δηλαδή αν $\lambda \neq 1$, τότε :

$$\begin{cases} \text{Av } 1 - \lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < 1: \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + \lambda x + 10} - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\sqrt{1 + \frac{\lambda}{x} + \frac{10}{x^2}} - \lambda \right) \right] \stackrel{\langle (+\infty) \cdot (1-\lambda) \rangle}{=} \stackrel{1-\lambda > 0}{=} +\infty \\ \text{Av } 1 - \lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > 1: \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + \lambda x + 10} - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\sqrt{1 + \frac{\lambda}{x} + \frac{10}{x^2}} - \lambda \right) \right] \stackrel{\langle (+\infty) \cdot (1-\lambda) \rangle}{=} \stackrel{1-\lambda < 0}{=} -\infty \end{cases}$$

(β) Αν $1 - \lambda = 0$, δηλαδή αν $\lambda = 1$, τότε :

(Το $\lambda = 1$ είναι η μοναδική λύση)

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + \lambda x + 10} - \lambda x &= \sqrt{x^2 + x + 10} - x = \frac{(\sqrt{x^2 + x + 10} - x)(\sqrt{x^2 + x + 10} + x)}{\sqrt{x^2 + x + 10} + x} = \\ &= \frac{x^2 + x + 10 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 10} + x} \stackrel{x > \delta \geq 0}{=} \frac{x + 10}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{10}{x^2}} + x} = \frac{x \left(1 + \frac{10}{x} \right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{10}{x^2}} + 1 \right)} = \frac{1 + \frac{10}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{10}{x^2}} + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + \lambda x + 10} - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{10}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{10}{x^2}} + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10}{x}}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10}{x^2}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} 1} = \frac{1 + 0}{\sqrt{1 + 0 + 0} + 1} = \frac{1}{2}$$

Σχόλιο: «Για χάρη» της γενικότητας, στις ασκήσεις 5 και 6, κάναμε επεξεργασία με «κοινό παράγοντα», ενώ γνωρίζαμε ότι για $\lambda=1$, η επεξεργασία αυτή απλώς μετατόπιζε το πρόβλημα.