

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$$1. \text{ Αν } f(x) = \begin{cases} -x+1, & \text{αν } x \leq 0 \\ \frac{\eta\mu x}{x} - 2x, & \text{αν } 0 < x \leq \pi \\ x-2, & \text{αν } \pi < x \end{cases} :$$

(α) Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια.

(β) Να αποδειχθεί ότι η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

(γ) Να βρεθεί το $f((-\infty, 0])$.

Λύση: (α) Προφανώς $D_f = \mathbb{R}$.

Η f είναι συνεχής για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ σαν πολωνυμική.

Η f είναι συνεχής για κάθε $x \in (0, \pi)$, σαν αποτέλεσμα πράξεων ανάμεσα σε συνεχείς συναρτήσεις.

Η f είναι συνεχής για κάθε $x \in (\pi, +\infty)$ σαν πολωνυμική.

Για το $x_1 = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x+1) = -0+1 = 1$, $f(0) = -0+1 = 1$

και $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} - \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x) = 1 - 0 = 1$.

Αφού $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, επομένως η f είναι συνεχής στο $x_1 = 0$.

Για το $x_2 = \pi$: $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \left(\frac{\eta\mu x}{x} - 2x \right) = \frac{\eta\mu \pi}{\pi} - 2\pi = 0 - 2\pi = -2\pi$,

$f(\pi) = \frac{\eta\mu \pi}{\pi} - 2\pi = 0 - 2\pi = -2\pi$ και $\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} (x-2) = \pi - 2$.

Αφού $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = f(\pi) = -2\pi \neq \pi - 2 = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x)$, επομένως η f δεν είναι συνεχής στο $x_2 = \pi$.

Έτσι, η f **δεν είναι συνεχής συνάρτηση**, αφού δεν είναι συνεχής στο $x_2 = \pi$.

(β) Παρατηρούμε ότι η f , είναι συνεχής στο $[0, \pi]$, αφού είναι συνεχής για κάθε $x \in (0, \pi)$

και επιπλέον $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ και $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = f(\pi)$.

Επίσης, $f(0) \cdot f(\pi) = 1 \cdot (-2\pi) = -2\pi < 0$ και συνεπώς, σύμφωνα με το θεώρημα του **Bolzano**,

υπάρχει $x_0 \in (0, \pi)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

Άρα η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

(γ) Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$, με $x_1 < x_2$: $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow -x_1 + 1 > -x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

και επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$. Επίσης η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$.

Έτσι $f((-\infty, 0]) = [f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] = [1, +\infty)$, αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x+1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$.

Συμπλήρωμα: Η συνάρτηση $g(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$, σαν πηλίκο συνεχών συναρτήσεων,

και επομένως είναι συνεχής και στο $(0, \pi) \subseteq \mathbb{R}^*$. Επίσης η συνάρτηση $h(x) = -2x$ είναι συνεχής

στο $\mathbb{R}$ σαν πολωνυμική και επομένως είναι συνεχής και στο $(0, \pi) \subseteq \mathbb{R}$.

Συνεπώς και η $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x} + (-2x)$ είναι συνεχής στο $(0, \pi)$, σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

$-2\pi \neq \pi - 2 \Leftrightarrow 2 \neq 3\pi \Leftrightarrow \pi \neq \frac{2}{3}$ και $\pi \neq \frac{2}{3}$ αληθεύει, αφού $\pi > 3,14 > 1 > \frac{2}{3}$.

Αλλιώς, $\pi \neq \frac{2}{3}$, αφού δε γίνεται να είναι ίσοι ένας άρρητος με ένα ρητό.

Σχόλια: (i) Επειδή, η εύρεση των ορίων δεν είναι το ζητούμενο, μπορούμε να είμαστε «περιληπτικοί».

(ii) Με «μια ματιά», είδαμε ότι δεν υπάρχουν ρίζες της f στα $(-\infty, 0)$ και $(\pi, +\infty)$,

αφού σε αυτά είναι προφανώς αδύνατες, η $-x+1=0$ και η $x-2=0$ αντίστοιχα.

(iii) Λέμε ότι: «η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ », όταν η f είναι συνεχής για κάθε $x \in (-\infty, 0)$

$$\text{και επιπλέον } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0).$$

Προφανώς η f είναι συνεχής στο $(-\infty, \pi]$, ενώ δεν είναι συνεχής στο $[\pi, +\infty)$.

(iv) Όταν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ του D_f ,

τότε είναι συνεχής και σε κάθε διάστημα $\Delta_1 \subseteq \Delta$.

(v) Η συνάρτηση $\varphi(x) = -x+1$, είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$, σαν πολυωνυμική, και επομένως είναι συνεχής και στο $(-\infty, 0]$. Έτσι, αφού $f = \varphi$ στο $(-\infty, 0]$, θα είναι και η f συνεχής στο $(-\infty, 0]$

$$\text{με συνέπεια, } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = -0+1 = 1.$$

Επομένως, για να είναι η f είναι συνεχής στο $x_1 = 0$, αρκεί $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.

2. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς και να βρείτε το σύνολο τιμών τους :

(α) $f(x) = \eta\mu^3 x + \eta\mu x - 5$, (β) $f(x) = e^{\eta\mu x}$, (γ) $f(x) = \ln(\ln x)$.

Απόδειξη: (α) $f(x) = \eta\mu^3 x + \eta\mu x - 5$ και προφανώς $D_f = \mathbb{R}$.

$$y = \eta\mu^3 x + \eta\mu x - 5 \text{ και αν θέσουμε } \eta\mu x = u, \text{ τότε } y = u^3 + u - 5.$$

Παρατηρούμε ότι $f = g \circ h$, όπου $h(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = x^3 + x - 5$.

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} : (g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(\eta\mu x) = (\eta\mu x)^3 + \eta\mu x - 5 = \eta\mu^3 x + \eta\mu x - 5 = f(x)$$

Επομένως η f είναι συνεχής συνάρτηση, σα σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων h και g .

Όπως είναι γνωστό, η συνάρτηση $h(x) = \eta\mu x$, έχει ελάχιστη τιμή $m = -1$ και μέγιστη τιμή $M = 1$.

Επειδή η h είναι συνεχής, από το **Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών** προκύπτει

ότι και κάθε στοιχείο του διαστήματος $[-1, 1]$ είναι τιμή της h και συνεπώς $h(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

Η συνάρτηση $g(x) = x^3 + x - 5$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αφού για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

$$\text{με } x_1 < x_2 : \quad x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1^3 < x_2^3 \\ x_1 < x_2 \end{cases} \Rightarrow x_1^3 + x_1 < x_2^3 + x_2 \Rightarrow x_1^3 + x_1 - 5 < x_2^3 + x_2 - 5 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Επίσης η g είναι συνεχής σαν πολυωνυμική, με $D_g = \mathbb{R}$, άρα είναι συνεχής και στο $[-1, 1]$

$$\text{και επομένως } f(D_f) = f(\mathbb{R}) = (g \circ h)(\mathbb{R}) = g(h(\mathbb{R})) = g([-1, 1]) \stackrel{g'}{=} [g(-1), g(1)] = [-7, -3].$$

(β) $f(x) = e^{\eta\mu x}$ και προφανώς $D_f = \mathbb{R}$. $y = e^{\eta\mu x}$ και αν θέσουμε $\eta\mu x = u$, τότε $y = e^u$.

Παρατηρούμε ότι $f = g \circ h$, όπου $h(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = e^x$.

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} : (g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(\eta\mu x) = e^{\eta\mu x} = f(x)$$

Επομένως η f είναι συνεχής συνάρτηση, σα σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων h και g .

Όπως είναι γνωστό, η συνάρτηση $h(x) = \eta\mu x$, έχει ελάχιστη τιμή $m = -1$ και μέγιστη τιμή $M = 1$.

Επειδή η h είναι συνεχής, από το **Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών** προκύπτει

ότι και κάθε στοιχείο του διαστήματος $[-1, 1]$ είναι τιμή της h και συνεπώς $h(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

Η συνάρτηση $g(x) = e^x$, είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,

άρα είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής και στο $[-1, 1]$ και επομένως

$$f(D_f) = f(\mathbb{R}) = (g \circ h)(\mathbb{R}) = g(h(\mathbb{R})) = g([-1, 1]) \stackrel{g'}{=} [g(-1), g(1)] = [e^{-1}, e^1] = \left[\frac{1}{e}, e \right].$$

$$(γ) \quad f(x) = \ln(\ln x). \quad D_f = (1, +\infty): x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \text{ και} \\ \ln x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \text{ και} \\ \ln x > \ln 1 \end{cases} \stackrel{\ln'}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x > 0 \text{ και} \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

$y = \ln(\ln x)$ και αν θέσουμε $\ln x = u$, τότε $y = \ln u$ και επομένως $f = g \circ g$, όπου $g(x) = \ln x$.

Για κάθε $x \in (1, +\infty)$: $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(\ln x) = \ln(\ln x) = f(x)$.

Επομένως η f είναι **συνεχής συνάρτηση**, σα σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων g και g .

Η συνάρτηση f είναι και **γνησίως αύξουσα**, αφού για κάθε $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$,

$$\text{με } x_1 < x_2: \quad x_1 < x_2 \stackrel{\ln'}{\Rightarrow} \ln x_1 < \ln x_2 \stackrel{\ln'}{\Rightarrow} \ln(\ln x_1) < \ln(\ln x_2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

$$\text{Επομένως } f((1, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln(\ln x)), \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(\ln x)) \right) = (-\infty, +\infty).$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln(\ln x)) \stackrel{\ln x = u}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} (\ln u) = \lim_{u \rightarrow 0^+} (\ln u) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(\ln x)) \stackrel{\ln x = u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} (\ln u) = +\infty$$

$$\text{Για } \ln x = u, \text{ θα έχουμε } \lim_{x \rightarrow 1^+} u = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x) = \ln 1 = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty.$$

Συμπλήρωμα: Στις (α) και (β), $D_f = \mathbb{R}$, αφού $D_h = D_g = \mathbb{R}$

$$\text{και έτσι } x \in D_f \Leftrightarrow x \in D_{g \circ h} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_h = \mathbb{R} \\ \text{και } h(x) \in D_g = \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

3. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μια τουλάχιστο λύση, στο αντίστοιχο διάστημα:

$$(α) \quad \eta \mu x - x + 1 = 0, \text{ στο } (0, \pi) \quad \text{και} \quad (β) \quad \frac{x^4 + 1}{x} + \frac{x^6 + 1}{x - 3} = 0, \text{ στο } (0, 3).$$

Απόδειξη: (α) Η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x - x + 1$, είναι **συνεχής στο** $[0, \pi]$,

αφού προφανώς $D_f = \mathbb{R}$ και f **συνεχής**, σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

$$\text{Επιπλέον } f(0) \cdot f(\pi) = (\eta \mu 0 - 0 + 1)(\eta \mu \pi - \pi + 1) = 1 \cdot (-\pi + 1) = -\pi + 1 < 0, \text{ αφού } 1 < \pi.$$

Έτσι, η f πληρεί τις συνθήκες του θεωρήματος **Bolzano** στο $[0, \pi]$

και συνεπώς έχει μία τουλάχιστο ρίζα στο $(0, \pi)$, δηλαδή

η εξίσωση $f(x) = 0$ και η ισοδύναμή της $\eta \mu x - x + 1 = 0$, έχουν μία τουλάχιστο λύση στο $(0, \pi)$.

$$(β) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^4 + 1}{x} + \frac{x^6 + 1}{x - 3} = 0 \\ \text{και } x \in (0, 3) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x^4 + 1)(x - 3) + x(x^6 + 1) = 0 \\ \text{και } x \in (0, 3) \end{array} \right\}.$$

Η συνάρτηση $f(x) = (x^4 + 1)(x - 3) + x(x^6 + 1) = x^7 + x^5 - 3x^4 + 2x - 3$, είναι **συνεχής στο** $[0, 3]$,

αφού προφανώς $D_f = \mathbb{R}$ και f **συνεχής**, σαν πολυωνυμική.

$$\text{Επιπλέον } f(0) \cdot f(3) = \underset{(-)}{[1 \cdot (-3)]} \cdot \underset{(+)}{[3 \cdot (3^6 + 1)]} < 0.$$

Έτσι, η f πληρεί τις συνθήκες του θεωρήματος **Bolzano** στο $[0, 3]$

και συνεπώς έχει μία τουλάχιστο ρίζα στο $(0, 3)$, δηλαδή

η εξίσωση $f(x) = 0$ και η ισοδύναμή της $\frac{x^4 + 1}{x} + \frac{x^6 + 1}{x - 3} = 0$, έχουν μία τουλάχιστο λύση στο $(0, 3)$.

2^η απόδειξη: Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x} + \frac{x^6 + 1}{x - 3}$, είναι **συνεχής στο** $[1, 2]$ και $f(1) \cdot f(2) < 0$.

Έτσι, η f πληρεί τις συνθήκες του θεωρήματος **Bolzano** στο $[1, 2]$

και συνεπώς έχει μία τουλάχιστο ρίζα στο $(1, 2)$, δηλαδή η εξίσωση $\frac{x^4 + 1}{x} + \frac{x^6 + 1}{x - 3} = 0$,

έχει μία τουλάχιστο λύση στο $(0, 3)$, αφού $(1, 2) \subseteq (0, 3)$.

- Σχόλια:** (1) Όταν δε μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο, με τη χρήση του θεωρήματος **Bolzano**, στην αρχική εξίσωση, δοκιμάζουμε την εφαρμογή της σε κάποια ισοδύναμη.
 (2) Προφανώς η δεύτερη λύση δεν είναι πάντα εύκολη, απλώς προτείνεται σαν «ιδέα».

4. (i) Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Να βρείτε το $f(0)$, αν για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει: $x \cdot f(x) = \sin x - 1$

(ii) Ομοίως, να βρείτε το $g(0)$ για τη συνάρτηση g που είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|x \cdot g(x) - \eta \mu x| \leq x^2$

Λύση: (i) Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, θα έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

Επίσης, «κοντά στο 0», $x \cdot f(x) = \sin x - 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{\sin x - 1}{x}$

$$\text{και συνεπώς } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 0.$$

(ii) Επειδή η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, θα έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$.

Επίσης, «κοντά στο 0», $|x \cdot g(x) - \eta \mu x| \leq x^2 \Leftrightarrow \left| x \cdot \left(g(x) - \frac{\eta \mu x}{x} \right) \right| \leq x^2 \Leftrightarrow |x| \left| g(x) - \frac{\eta \mu x}{x} \right| \leq x^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left| g(x) - \frac{\eta \mu x}{x} \right| \leq \frac{|x|^2}{|x|} \Leftrightarrow \left| g(x) - \frac{\eta \mu x}{x} \right| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq g(x) - \frac{\eta \mu x}{x} \leq |x|$$

Όμως $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = \lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = 0$ και επομένως $\lim_{x \rightarrow 0} \left(g(x) - \frac{\eta \mu x}{x} \right) = 0$, από το «κριτήριο παρεμβολής».

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(g(x) - \frac{\eta \mu x}{x} \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1 \text{ και συνεπώς } g(0) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1.$$

Σχόλια: (1) Βρήκαμε την εικόνα μέσω του ορίου, αφού η σχέση που μας είχαν διαθέσει, δε βοηθούσε «άμεσα» στην εύρεση της εικόνας.

(2) Η σχέση $x \cdot f(x) = \sin x - 1$, αληθεύει και για $x = 0$, αφού $0 \cdot f(0) = \sin 0 - 1 \Leftrightarrow 0 \cdot f(0) = 0$.

Η πρόσθετη αυτή πληροφορία, σε τίποτα δε θα άλλαζε το αποτέλεσμα, αφού «αφήνει ανοικτά» όλα τα ενδεχόμενα για την τιμή $f(0)$.

5. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και συνεχείς στο $[0,1]$

και πληρούν τις σχέσεις $f(0) < g(0)$ και $f(1) > g(1)$,

να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

Απόδειξη: Η συνάρτηση $\varphi = f - g$ ορίζεται και είναι συνεχής στο $[0,1]$, σαν «άθροισμα» συνεχών συναρτήσεων. Επίσης $\varphi(0) \cdot \varphi(1) = (f - g)(0) \cdot (f - g)(1) = \underset{(-)}{[f(0) - g(0)]} \cdot \underset{(+)}{[f(1) - g(1)]} < 0$.

$$\boxed{f(0) < g(0) \Leftrightarrow f(0) - g(0) < 0 \text{ και } f(1) > g(1) \Leftrightarrow f(1) - g(1) > 0}$$

Έτσι, η φ πληρεί τις συνθήκες του θεωρήματος **Bolzano** στο $[0,1]$ και συνεπώς υπάρχει τουλάχιστον

ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(\xi) = 0$, δηλαδή $f(\xi) - g(\xi) = 0$ και συνεπώς $f(\xi) = g(\xi)$.

Σχόλιο: Σε μια άλλη διατύπωση, το ίδιο πρόβλημα θα μπορούσε να παρουσιαστεί σαν αναζήτηση κοινού σημείου γραφικών παραστάσεων ή κοινού σημείου γραφικής παράστασης και ευθείας.

Σ' αυτές τις περιπτώσεις, μας «συμφέρει» να μετατρέπουμε το πρόβλημα «σύμπτωσης», που αφορά δυο συναρτήσεις, σε πρόβλημα **ύπαρξης ρίζας**, της «διαφοράς» των δύο συναρτήσεων. Την ύπαρξη ρίζας συνάρτησης, εξασφαλίζει το θεώρημα **Bolzano**, αλλά και η παρουσία του μηδενός στο σύνολο τιμών, ενώ η μονοτονία της συνάρτησης πιστοποιεί τη μοναδικότητα της ρίζας, αφού εξασφαλίζει ότι η συνάρτηση είναι «1-1».

6. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και συνεχείς στο $[0,1]$, με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ και ικανοποιούν τη σχέση $g^2(x) = f^2(x)$, για κάθε $x \in [0,1]$,
να αποδείξετε ότι $f = g$ ή $f = -g$ στο $[0,1]$.

Απόδειξη: Ισχύει $g^2(x) = f^2(x) \Leftrightarrow \frac{g^2(x)}{f^2(x)} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{f(x)} = \pm 1$, για κάθε $x \in [0,1]$.

Αν θέσουμε $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$, για κάθε $x \in [0,1]$, τότε προφανώς η h είναι ορισμένη

και συνεχής στο $[0,1]$ και επιπλέον $h(x) = \pm 1$, για κάθε $x \in [0,1]$.

Έτσι η h δεν έχει ρίζες στο $[0,1]$ και, επειδή είναι συνεχής, θα διατηρεί το πρόσημό της στο $[0,1]$.

Συνεπώς θα ισχύει $h(x) = 1$ για κάθε $x \in [0,1]$ ή $h(x) = -1$ για κάθε $x \in [0,1]$.

Άρα, $\frac{g(x)}{f(x)} = 1$ για κάθε $x \in [0,1]$ ή $\frac{g(x)}{f(x)} = -1$ για κάθε $x \in [0,1]$,

επομένως $g(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$ ή $g(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$
και συνεπώς $f = g$ ή $f = -g$ στο $[0,1]$.

Σχόλια: (1) Στις ασκήσεις 5 και 6, αντί για το διάστημα $[0,1]$,

θα μπορούσαμε να είχαμε χρησιμοποιήσει, οποιοδήποτε διάστημα $[a,b]$.

(2) Παρατηρούμε, ότι ανάλογα με τις «ανάγκες» της άσκησης,

μπορούμε, αντί να εργαστούμε με «διαφορά», να εργαστούμε με «πηλίκο».

(3) Στην άσκηση 6, μπορούσαμε να εργαστούμε και με «διαφορά», όμως αυτό είναι πιο δύσκολο.

Εκτός των άλλων, θέλαμε να «δούμε» και το «πηλίκο».

2^η (Με «διαφορά»): Ισχύει $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$, γιατί αν υπήρχε $x \in [0,1]$ με $g(x) = 0$, τότε $g^2(x) = 0$, επομένως $f^2(x) = 0$ και συνεπώς $f(x) = 0$. **ΑΤΟΠΟ**, αφού στην υπόθεση $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Έτσι οι συναρτήσεις f, g διατηρούν το πρόσημό τους στο $[0,1]$.

$g^2(x) = f^2(x) \Leftrightarrow g^2(x) - f^2(x) = 0 \Leftrightarrow (g(x) - f(x))(g(x) + f(x)) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \{g(x) - f(x) = 0 \text{ ή } g(x) + f(x) = 0\} \Leftrightarrow \{g(x) = f(x) \text{ ή } g(x) = -f(x)\}$ για κάθε $x \in [0,1]$.

Επειδή οι συναρτήσεις f, g διατηρούν το πρόσημό τους στο $[0,1]$, δε γίνεται να υπάρχουν

$x_1, x_2 \in [0,1]$ με $g(x_1) = f(x_1)$ και $g(x_2) = -f(x_2)$, γιατί τότε $g(x_1) \cdot g(x_2) = -f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$

ΑΤΟΠΟ αφού οι τιμές κάθε μιας των συναρτήσεων f, g είναι ομόσημες.

Συνεπώς, $f = g$ ή $f = -g$ στο $[0,1]$.

7. Έστω $f: [a,b] \rightarrow [a,b]$ συνεχής συνάρτηση.

Να δειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ με $f(x_0) = x_0$.

Απόδειξη: Για να υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ με $f(x_0) = x_0$, «πρέπει και αρκεί» να υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ με $f(x_0) - x_0 = 0$, δηλαδή να έχει ρίζα στο $[a,b]$ η συνάρτηση $\varphi: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\varphi(x) = f(x) - x$.

Η συνάρτηση $\varphi: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι **συνεχής** στο $[a,b]$, σαν «άθροισμα» συνεχών συναρτήσεων.

Προφανώς $f(a), f(b) \in [a,b]$ και αν $f(a) = a$ είτε $f(b) = b$, τότε $x_0 = a$ είτε $x_0 = b$.

Αν $f(a) \neq a$ και $f(b) \neq b$, τότε $a < f(a)$ και $f(b) < b$, επομένως $0 < f(a) - a$ και $f(b) - b < 0$,
και συνεπώς $\varphi(a) \cdot \varphi(b) = (f(a) - a) \cdot (f(b) - b) < 0$.

Έτσι, η φ πληρεί τις συνθήκες του θεωρήματος **Bolzano** στο $[a,b]$

και συνεπώς υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ με $\varphi(x_0) = 0$, δηλαδή $f(x_0) - x_0 = 0$.

Σχόλια: (1) Αφού $f : [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha, \beta]$, άρα $f([\alpha, \beta]) \subseteq [\alpha, \beta]$ και επομένως $\alpha \leq f(\alpha) \leq \beta$, $\alpha \leq f(\beta) \leq \beta$.

(2) Ουσιαστικά, αποδείξαμε ότι η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο με την ευθεία $y = x$.

8. Να αποδείξετε ότι οι **γραφικές παραστάσεις** των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \frac{1}{x}$

Έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο.

Απόδειξη: Προφανώς $D_f = (0, +\infty)$ και $D_g = \mathbb{R}^*$, και επομένως $D_f \cap D_g = (0, +\infty)$.

Για να έχουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g ένα ακριβώς κοινό σημείο, «πρέπει και αρκεί» να υπάρχει ένα ακριβώς $\xi \in (0, +\infty)$ έτσι ώστε $f(\xi) = g(\xi)$, δηλαδή $f(\xi) - g(\xi) = 0$.

Η συνάρτηση $\varphi = f - g$ είναι **συνεχής** στο $(0, +\infty)$, σαν «άθροισμα» συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης η φ είναι **γνησίως αύξουσα**, αφού για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, με $x_1 < x_2$:

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{\ln'} \left\{ \begin{array}{l} \ln x_1 < \ln x_2 \\ \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ln x_1 < \ln x_2 \\ -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \ln x_1 - \frac{1}{x_1} < \ln x_2 - \frac{1}{x_2} \Rightarrow \varphi(x_1) < \varphi(x_2)$$

Έτσι $\varphi((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \right) = (-\infty, +\infty)$, άρα το **0** είναι τιμή της φ και επειδή

η φ είναι γνησίως αύξουσα, υπάρχει ένα ακριβώς $\xi \in (0, +\infty)$ με $\varphi(\xi) = 0$, δηλαδή $f(\xi) - g(\xi) = 0$.

Συμπλήρωμα: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x + \frac{1}{-x} \right) \stackrel{\ll (-\infty) + (-\infty) \gg}{=} -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x - \frac{1}{x} \right) \stackrel{\ll (+\infty) - 0 \gg}{=} +\infty$

9. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, για την οποία ισχύει $f^2(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

(β) Να βρείτε τα διαστήματα σταθερού πρόσημου, της f .

(γ) Να βρείτε τον τύπο της f .

Λύση: (α) $f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Επομένως η f έχει μοναδική ρίζα το **0**.

(β) Η συνάρτηση f στο $(-\infty, 0)$ είναι **συνεχής** και δεν έχει ρίζες σ' αυτό.

Συνεπώς η f έχει σταθερό πρόσημο στο $(-\infty, 0)$. Ομοίως η f έχει σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$.

(γ)
$$f^2(x) = x^2 \Leftrightarrow |f(x)|^2 = |x|^2 \Leftrightarrow |f(x)| = |x|$$

(i) Επειδή η f έχει σταθερό πρόσημο στο $(-\infty, 0)$, θα ισχύει:

$$f(x) < 0, \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0) \text{ και επομένως } |f(x)| = |x| \Leftrightarrow -f(x) = -x \Leftrightarrow f(x) = x,$$

$$\text{ή } f(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0) \text{ και επομένως } |f(x)| = |x| \Leftrightarrow f(x) = -x.$$

(ii) Επειδή η f έχει σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$, θα ισχύει:

$$f(x) < 0, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty) \text{ και επομένως } |f(x)| = |x| \Leftrightarrow -f(x) = x \Leftrightarrow f(x) = -x,$$

$$\text{ή } f(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty) \text{ και επομένως } |f(x)| = |x| \Leftrightarrow f(x) = x.$$

Αν πάρουμε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς και συμπληρώσουμε με το δεδομένο $f(0) = 0$,

προκύπτουν οι τέσσερις παρακάτω λύσεις για τον τύπο της f .

$$\begin{aligned} (1) f(x) &= \begin{cases} -x, & \text{αν } x \in (-\infty, 0) \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ -x, & \text{αν } x \in (0, +\infty) \end{cases} = -x, & (2) f(x) &= \begin{cases} -x, & \text{αν } x \in (-\infty, 0) \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ x, & \text{αν } x \in (0, +\infty) \end{cases} = |x| \\ (3) f(x) &= \begin{cases} x, & \text{αν } x \in (-\infty, 0) \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ -x, & \text{αν } x \in (0, +\infty) \end{cases} = -|x|, & (4) f(x) &= \begin{cases} x, & \text{αν } x \in (-\infty, 0) \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ x, & \text{αν } x \in (0, +\infty) \end{cases} = x \end{aligned}$$