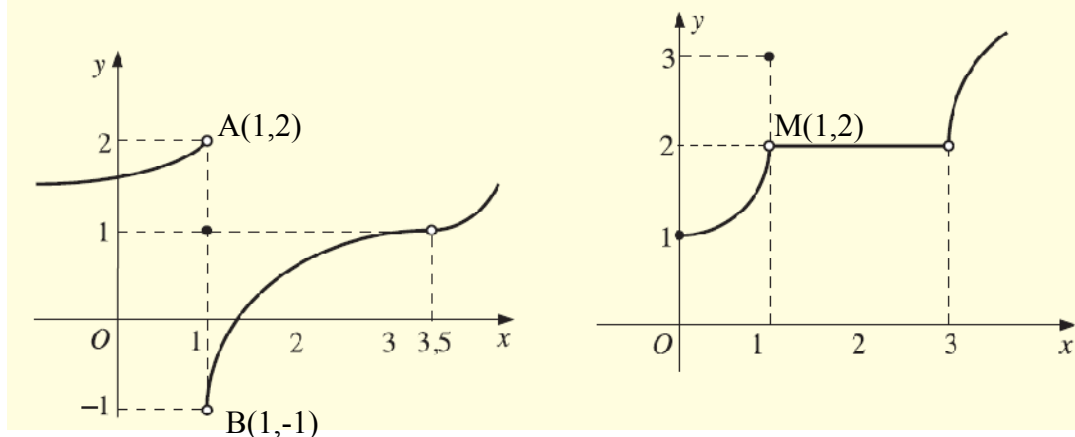


§1.8 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ασκήσεις – Α' ομάδας

1. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δυο συναρτήσεων. Να βρείτε τα σημεία στα οποία αυτές δεν είναι συνεχείς.



Απάντηση: Ονομάζουμε C_f , τη γραφική παράσταση του πρώτου σχήματος, και C_g , τη γραφική παράσταση του δεύτερου σχήματος.

- a) Στο πρώτο σχήμα, η συνάρτηση f **δεν είναι συνεχής** στο $x_0 = 1$, και αυτό μπορούμε να το τεκμηριώσουμε λέγοντας: «αφού $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \neq -1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, δηλαδή αφού η συνάρτηση f , **δεν έχει όριο** στο $x_0 = 1$.»

- b) Στο δεύτερο σχήμα, η συνάρτηση g **δεν είναι συνεχής** στο $x_0 = 1$, αφού $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2 \neq 3 = g(1)$, δηλαδή αφού **το όριο** της συνάρτησης g στο $x_0 = 1$, **είναι διαφορετικό** από την τιμή της συνάρτησης g , στο $x_0 = 1$.

Σχόλια: (1) Και στα δύο σχήματα, παρατηρούμε «**ασυνέχεια**» στο $x_0 = 1$, όμως από την εμπειρία μας, μπορούμε να αξιολογήσουμε το «**πρόβλημα ασυνέχειας**», στην πρώτη περίπτωση πιο **δύσκολα αντιμετωπίσιμο** από ότι στη δεύτερη. Στην πρώτη περίπτωση, τα τμήματα της γραφικής παράστασης, δεξιά και αριστερά της ευθείας που είναι κάθετη στον οριζόντιο άξονα, στο $x_0 = 1$, δηλαδή της ευθείας με εξίσωση $x = 1$, **δε «συγκλίνουν»** όταν $x \rightarrow x_0$, αφού το ένα «πάει» στο σημείο $A(1,2)$, ενώ το άλλο στο σημείο $B(1,-1)$. Προφανώς, σε αυτή την περίπτωση, η συνάρτηση f , χρησιμοποιεί διαφορετικό τύπο, για τα δύο διαστήματα του πεδίου ορισμού της με ανοικτό άκρο το $x_0 = 1$, και επομένως η «διόρθωση» θα απαιτούσε αλλαγή στους τύπους, έτσι ώστε να αποκτήσει η συνάρτηση όριο πραγματικό αριθμό στο $x_0 = 1$, και απαίτηση από το $x_0 = 1$, να δεχθεί για τιμή $f(1)$, το όριο αυτό. Στη δεύτερη περίπτωση, τα τμήματα της γραφικής παράστασης, «**συγκλίνουν**» στο σημείο $M(1,2)$, και συνεπώς η «διόρθωση» θα απαιτούσε απλά από το $x_0 = 1$, να δεχθεί για τιμή $g(1)$, το όριο της συνάρτησης g , στο $x_0 = 1$. (Η «**διορθωμένη**», είναι μια άλλη συνάρτηση.)

(2) Στο πρώτο σχήμα, θα μπορούσαμε να είχαμε πει: «η συνάρτηση f **δεν είναι συνεχής** στο $x_0 = 1$ », «αφού $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \neq 1 = f(1)$ » ή «αφού $f(1) = 1 \neq -1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ », δηλαδή αφού ένα **πλευρικό όριο** της συνάρτησης στο $x_0 = 1$, **είναι διαφορετικό** από το $f(1)$. Προφανώς, επιλέξαμε για απάντηση, αυτήν που διαπίστωνε «**διαφορετικά πλευρικά όρια**», έχοντας στο μυαλό μας το τι είναι πιο σημαντικό, με βάση την αξιολόγηση του σχολίου (1).

2. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο x_0 , τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$i) f(x) = \begin{cases} x^2 + 4, & x < 2 \\ x^3, & x \geq 2 \end{cases}, \text{ αν } x_0 = 2.$$

Απάντηση: Επειδή $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 4) = 2^2 + 4 = 8$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^3 = 2^3 = 8$, επομένως $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 8$. Επίσης $f(2) = 2^3 = 8$, συνεπώς $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$, δηλαδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

Σχόλιο: (1) Η συνάρτηση f , είναι συνεχής σε κάθε $x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$, σαν πολυωνυμική, και είναι συνεχής στο $x_0 = 2$, αφού $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$.

Επομένως η συνάρτηση f , είναι συνεχής συνάρτηση, αφού είναι συνεχής σε κάθε $x \in D_f = \mathbb{R}$.

$$(2) \text{ Αν «αλλάξουμε» τη συνάρτηση σε } h(x) = \begin{cases} x^2 + 4, & x < 2 \\ 9, & \text{αν } x = 2 \\ x^3, & x > 2 \end{cases}, \text{ τότε προφανώς, η συνάρτησή μας}$$

θα παρουσιάσει «ασυνέχεια» στο $x_0 = 2$, σαν τη δεύτερη περίπτωση της άσκησης 1. Διαπιστώνουμε, πόσο εύκολα «αποκτά ασυνέχεια» μια συνάρτηση, ή αντίστροφα τη «διορθώνει». (3) Η συνάρτηση $g(x) = x^3$, είναι συνεχής συνάρτηση σαν πολυωνυμική, και συνεπώς είναι συνεχής σε κάθε διάστημα, υποσύνολο του πεδίου ορισμού της, $D_g = \mathbb{R}$. Έτσι, η g είναι συνεχής στο $[2, +\infty)$, συνεπώς η f είναι συνεχής στο $[2, +\infty)$, και επομένως όπως θα έπρεπε να ήταν αναμενόμενο $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$.

$$ii) f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1 \\ \sqrt{3+x}, & x \geq 1 \end{cases}, \text{ αν } x_0 = 1.$$

Απάντηση: Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 1^2 + 1 = 2$,

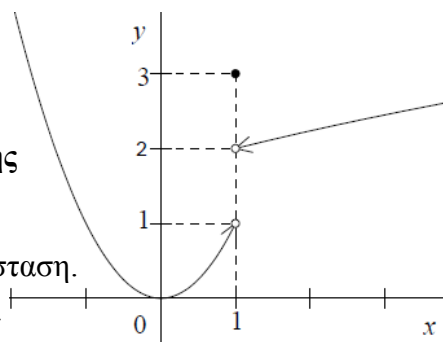
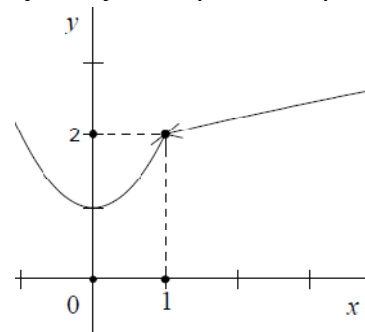
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{3+x} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2, \text{ επομένως } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2.$$

Επίσης $f(1) = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$, συνεπώς $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, δηλαδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Σχόλιο: Αν $g(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 3, & x = 1 \\ \sqrt{3+x}, & x > 1 \end{cases}$, τότε η g , δεν είναι συνεχής

στο $x_0 = 1$. Στο διπλανό σχήμα, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση.

Είναι η πρώτη περίπτωση της άσκησης 1. Για να «διορθώσουμε» το πρόβλημα, και να προκύψει η συνεχής συνάρτηση f , της παραπάνω άσκησης, «ανεβάσαμε» τον «αριστερό» κλάδο κατά μια μονάδα, αυξάνοντας τη σταθερά του τύπου κατά μια μονάδα. Έτσι, στη συνάρτηση f , οι τιμές των $x \in (-\infty, 1)$, είναι αυξημένες κατά μια μονάδα σε σχέση με τις αντίστοιχες της συνάρτησης g . Η αλλαγή δηλαδή, επηρέασε άπειρο πλήθος τιμών. Για να ολοκληρωθεί η «διόρθωση», απαιτήσαμε από το $x_0 = 1$, να δεχθεί «να κάνει παρέα» με τα $x > 1$, αποδεχόμενο για y του, το $y_0 = \sqrt{3+x_0}$.



$$\text{iii) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2}, & x \neq -2 \\ -3, & x = -2 \end{cases}, \text{ αν } x_0 = -2.$$

Απάντηση: Αφού $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow -2} (x - 1) = -2 - 1 = -3$, και $f(-2) = -3$, συνεπώς $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$, δηλαδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = -2$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + x - 2) = 0 = \lim_{x \rightarrow -2} (x + 2)$, αντιμετωπίζουμε απροσδιόριστη μορφή « $\frac{0}{0}$ », και πρέπει να μετασχηματίσουμε τον «τύπο». Έτσι, για $x \neq -2$ έχουμε: $\frac{x^2 + x - 2}{x + 2} = \frac{(x + 2) \cdot (x - 1)}{x + 2} = x - 1$

Σχόλιο: Για να δικαιολογήσουμε το «βήμα» του μετασχηματισμού, όταν υπολογίσαμε το όριο, πάνω από το σύμβολο(=) γράψαμε το συμβολισμό της απροσδιόριστης μορφής, « $\frac{0}{0}$ ».

9. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για κάθε $x \in D_f$.

$$\text{iii) } f(x) = \varepsilon\varphi x - \sqrt{3}, \text{ με } D_f = \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right).$$

$$\boxed{\varepsilon\varphi \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}}$$

Λύση: Προφανώς η f είναι συνεχής συνάρτηση ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, της $g(x) = \varepsilon\varphi x$, και της πολωνυμικής $h(x) = -\sqrt{3}$.

Θα βρούμε τις ρίζες της f , στο διάστημα $(-\pi, \pi)$.

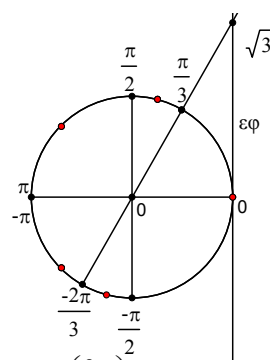
$$f(x) = \varepsilon\varphi x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left\{ x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z} \\ \text{και} \\ -\pi < x < \pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z} \\ \text{και} \\ -\pi < \kappa\pi + \frac{\pi}{3} < \pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z} \\ \text{και} \\ -1 < \kappa + \frac{1}{3} < 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z} \\ \text{και} \\ -1 - \frac{1}{3} < \kappa < \frac{2}{3} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z} \\ \text{και} \\ \kappa = -1 \text{ ή } \kappa = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{2\pi}{3} \\ \text{ή} \\ x = \frac{\pi}{3} \end{array} \right\}$$

Στο διπλανό σχήμα, τα κόκκινα σημεία αντιστοιχούν στα επιλεγμένα x_0 κάθε διαστήματος. Μπορούμε να σκεφτόμαστε σε μοίρες, και να εργαζόμαστε σε rad.

Στο παρακάτω σχήμα, βλέπουμε τις ρίζες στον τριγωνομετρικό κύκλο, και τα διαστήματα σταθερού προσήμου.



$$\varepsilon\varphi \frac{-3\pi}{4} = \varepsilon\varphi \left(-\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow f\left(\frac{-3\pi}{4}\right) = 1 - \sqrt{3}, \varepsilon\varphi \frac{3\pi}{4} = \varepsilon\varphi \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \varepsilon\varphi \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} = -1 \Rightarrow f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1 - \sqrt{3}$$

$$f(0) = \varepsilon\varphi 0 - \sqrt{3} = 0 - \sqrt{3} = -\sqrt{3}, \varepsilon\varphi \frac{5\pi}{12} = \varepsilon\varphi \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \sigma\varphi \frac{\pi}{12} = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \varepsilon\varphi \frac{5\pi}{12} - \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = 2$$

Διάστημα	$\left(-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right)$	$\left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$
Επιλεγμένος αριθμός x_0	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-7\pi}{12}$	0	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{4}$
$f(x_0)$	$1 - \sqrt{3}$	2	$-\sqrt{3}$	2	$-1 - \sqrt{3}$
Πρόσημο της f	-	+	-	+	-

$$\varepsilon\varphi \left(\frac{-7\pi}{12}\right) = \varepsilon\varphi \left(-\pi + \frac{5\pi}{12}\right) = \varepsilon\varphi \frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow f\left(\frac{-7\pi}{12}\right) = \varepsilon\varphi \left(\frac{-7\pi}{12}\right) - \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = 2$$

$$\begin{aligned} \sigma\varphi \frac{\pi}{12} &= \frac{1}{\varepsilon\varphi \frac{\pi}{12}} = \\ &= \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \\ &= \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \\ &= \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

Σχόλια: (1) Όπως γράψαμε, μπορούμε να σκεφτόμαστε σε μοίρες και να εργαζόμαστε σε rad.

Έτσι, $\frac{\pi}{12}\text{rad} = 15^\circ$, $\frac{\pi}{3}\text{rad} = 60^\circ$, $\frac{\pi}{4}\text{rad} = 45^\circ$, $\frac{5\pi}{12}\text{rad} = 75^\circ$ και $\frac{\pi}{2}\text{rad} = 90^\circ$.

- Επειδή το σημείο που αντιστοιχεί στο $-\frac{2\pi}{3}$, είναι αντιδιαμετρικό του σημείου που αντιστοιχεί

στο $\frac{\pi}{3}$, $\left(\frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}\right)$ όπως έχουμε $0^\circ < 45^\circ < 60^\circ \Leftrightarrow 0\text{rad} < \frac{\pi}{4}\text{rad} < \frac{\pi}{3}\text{rad}$,

έτσι και για τα αντιδιαμετρικά σημεία έχουμε:

$$(0 - \pi)\text{rad} < \left(\frac{\pi}{4} - \pi\right)\text{rad} < \left(\frac{\pi}{3} - \pi\right)\text{rad} \Leftrightarrow -\pi\text{rad} < -\frac{3\pi}{4}\text{rad} < -\frac{2\pi}{3}\text{rad}.$$

- Επειδή το σημείο που αντιστοιχεί στο $-\frac{7\pi}{12}$, είναι αντιδιαμετρικό του σημείου που αντιστοιχεί

στο $\frac{5\pi}{12}$, $\left(\frac{5\pi}{12} - \pi = -\frac{7\pi}{12}\right)$ όπως έχουμε $60^\circ < 75^\circ < 90^\circ \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}\text{rad} < \frac{5\pi}{12}\text{rad} < \frac{\pi}{2}\text{rad}$,

έτσι και για τα αντιδιαμετρικά σημεία έχουμε:

$$\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right)\text{rad} < \left(\frac{5\pi}{12} - \pi\right)\text{rad} < \left(\frac{\pi}{2} - \pi\right)\text{rad} \Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3}\text{rad} < -\frac{7\pi}{12}\text{rad} < -\frac{\pi}{2}\text{rad}.$$

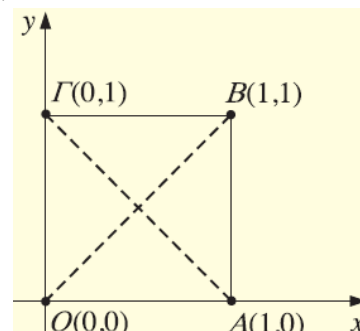
(2) Η συνάρτηση $g(x) = \varepsilon\phi x - \sqrt{3}$, με $D_g = \left[-\pi, \frac{-\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, είναι προφανώς συνεχής, και επομένως θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το πρόσημο των $g(-\pi)$, $g(\pi)$, για να εντοπίσουμε το πρόσημο της f , στα διαστήματα $\left(-\pi, \frac{-\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, αντίστοιχα.

Ασκήσεις – Β' ομάδας

8. Δίνεται το τετράγωνο OABΓ του διπλανού σχήματος, και μια συνεχής στο $[0,1]$ συνάρτηση f , της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο τετράγωνο αυτό.

i) Να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων του τετραγώνου

ii) Να αποδείξετε με το θεώρημα του Bolzano, ότι η C_f τέμνει και τις δυο διαγώνιες.



Απάντηση: i) OB: $y - 0 = \frac{1-0}{1-0}(x-0) \Leftrightarrow y = x$, AG: $y - 1 = \frac{1-0}{0-1}(x-0) \Leftrightarrow y = -x + 1$

ii) (a) Για να τέμνει η C_f την OB, αρκεί η συνάρτηση φ_1 με $\varphi_1(x) = f(x) - x$, να έχει ρίζα στο $[0,1]$. Η φ_1 είναι συνεχής στο $[0,1]$, σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, και έχουμε: $\varphi_1(0) \geq 0$ και $\varphi_1(1) \leq 0$, αφού $\varphi_1(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$, $\varphi_1(1) = f(1) - 1 \leq 0$. *

- Αν $\varphi_1(0) = 0$ είτε $\varphi_1(1) = 0$, τότε $f(0) = 0$ είτε $f(1) = 1$, και συνεπώς η C_f τέμνει την OB είτε στο σημείο O(0,0) είτε στο σημείο B(1,1) αντίστοιχα.
- Αν $\varphi_1(0) > 0$ και $\varphi_1(1) < 0$, τότε $\varphi_1(0) \cdot \varphi_1(1) < 0$, και από το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (0,1)$: $\varphi_1(x_0) = 0$, άρα $f(x_0) - x_0 = 0$, και αφού $f(x_0) = x_0$, η C_f τέμνει την OB εσωτερικά, στο σημείο της, $M(x_0, x_0)$.

* Επειδή η C_f είναι ολόκληρη μέσα στο τετράγωνο OABΓ, ισχύει $0 \leq f(x) \leq 1$, για κάθε $x \in [0,1]$, συνεπώς $f(0) \geq 0$ και αφού $f(x) - 1 \leq 0$, επομένως $f(1) - 1 \leq 0$.

(b) Για να τέμνει η C_f την ΑΓ, αρκεί η συνάρτηση φ_2 με $\varphi_2(x) = f(x) - (-x+1) = f(x) + x - 1$, να έχει ρίζα στο $[0,1]$. Η φ_2 είναι συνεχής στο $[0,1]$, σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, και: $\varphi_2(0) \leq 0$ και $\varphi_2(1) \geq 0$, αφού $\varphi_2(0) = f(0) + 0 - 1 = f(0) - 1 \leq 0$, $\varphi_2(1) = f(1) + 1 - 1 = f(1) \geq 0$.*

- Αν $\varphi_2(0) = 0$ είτε $\varphi_2(1) = 0$, τότε $f(0) = 1$ είτε $f(1) = 0$, και συνεπώς η C_f τέμνει την ΑΓ είτε στο σημείο $\Gamma(0,1)$ είτε στο σημείο $A(1,0)$ αντίστοιχα.
- Αν $\varphi_2(0) < 0$ και $\varphi_2(1) > 0$, τότε $\varphi_2(0) \cdot \varphi_2(1) < 0$, και από το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (0,1)$: $\varphi_2(x_0) = 0$, άρα $f(x_0) + x_0 - 1 = 0$, και αφού $f(x_0) = -x_0 + 1$, η C_f τέμνει την ΓΑ εσωτερικά, στο σημείο της, $M(x_0, -x_0 + 1)$.

* Επειδή η C_f είναι ολόκληρη μέσα στο τετράγωνο ΟΑΒΓ, ισχύει $0 \leq f(x) \leq 1$, για κάθε $x \in [0,1]$, συνεπώς $f(1) \geq 0$ και αφού $f(x) - 1 \leq 0$, επομένως $f(0) - 1 \leq 0$.

Διαγώνισμα

1. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια, τη συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & x \leq 0 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}, & x > 0 \end{cases}$

Απάντηση: Σε κάθε $x \in (-\infty, 0)$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Σε κάθε $x \in (0, +\infty)$ η f είναι συνεχής ως **πηλίκιο** συνεχών συναρτήσεων: της πολυωνυμικής του «αριθμητή» και του **αθροίσματος** συνεχών συναρτήσεων του «παρονομαστή». Στον «παρονομαστή», υπάρχει μια ρίζα πολυωνυμικής, η οποία είναι συνεχής σαν ρίζα συνεχούς, σε άθροισμα με μια πολυωνυμική μηδενικού βαθμού.

Επομένως η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$, όπως επίσης και στο $(0, +\infty)$.

Για $x_0 = 0$. Με $x \in (-\infty, 0)$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x^2 - 1) = 2 \cdot 0^2 - 1 = 0 - 1 = -1$,

με $x \in (0, +\infty)$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{0-1}{\sqrt{0}+1} = \frac{-1}{1} = -1$, και επειδή $f(0) = 2 \cdot 0^2 - 1 = -1$,

επομένως $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, και συνεπώς η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Έτσι, η f είναι **συνεχής συνάρτηση**, αφού είναι συνεχής σε κάθε $x \in D_f = \mathbb{R}$.

Σχόλια: Η γνωστή επεξεργασία $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x})^2 - 1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}-1$ προφανώς **δεν**

είναι αναγκαία, αλλά δεν μας ζημιώνει σε σχέση με το αποτέλεσμα, αφού

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x}-1) = \sqrt{0}-1 = -1$. Η **ζημιά** έχει να κάνει με τη σπατάλη

πολύτιμου χρόνου, και με τον κίνδυνο να μας «κακοχαρακτηρίσουν».

Όσοι όμως προτίμησαν τον μετασχηματισμό:

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x})^2 - 1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)}{x-1} = \sqrt{x}-1, \text{ θα έπρεπε να δηλώσουν σαν}$$

«δεξιά περιοχή εργασίας», «κοντά στο $x_0 = 0$ », το διάστημα $(0,1)$, διαφορετικά φορτώνονται με λάθος, δηλώνοντας ότι εργάζονται με $x > 0$.

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\sin x - \eta\mu x - 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα

$$\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right). \quad \text{\textbf{Λύση:}} \text{Υπάρχει η προφανής λύση } x = 0.$$

Επαλήθευση: $\sin 0 - \eta\mu 0 - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - 0 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$

Σχόλια: (1) Δεν απαιτήθηκε λύση με το Θεώρημα Bolzano. Όσοι έδωσαν τέτοια λύση, τουλάχιστον θα έπρεπε να διαπιστώσουν την ύπαρξη των προϋποθέσεων του Θεωρήματος, πριν καταλήξουν στο συμπέρασμα.

Λύση: Η συνάρτηση $f(x) = \sin x - \eta\mu x - 1$, είναι προφανώς **συνεχής συνάρτηση**, σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, δύο τριγωνομετρικών και μιας πολωνυμικής μηδενικού βαθμού.

Επομένως η f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, αφού $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \subseteq \mathbb{R} = D_f$.

$$\text{Επίσης } f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 1 = \sin\frac{\pi}{4} + \eta\mu\frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1 > 0$$

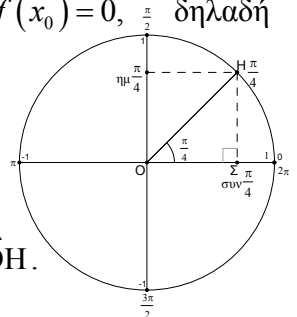
$$\text{και } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} - \eta\mu\frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = -1 < 0, \text{ και επομένως } f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0, \text{ και από}$$

το Θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) : f(x_0) = 0$, δηλαδή $\sin x_0 - \eta\mu x_0 - 1 = 0$, και το x_0 είναι προφανώς η λύση που ζητούσαμε.

$$(2) \text{ Αν δε γνωρίζαμε ότι } \sin\frac{\pi}{4} = \eta\mu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} : f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \eta\mu\frac{\pi}{4} - 1 > 0$$

Αυτό, στον μοναδιαίο κύκλο προκύπτει από την τριγωνική ανισότητα, στο $\triangle \Sigma \hat{O} H$.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\sin\frac{\pi}{4} - 1\right) + \left(-\eta\mu\frac{\pi}{4}\right) < 0, \text{ σαν άθροισμα δύο αρνητικών.}$$



3. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = x^4 - 9x^2$ για κάθε $x \in D_f$.

Απάντηση: Προφανώς η f είναι συνεχής ως πολωνυμική, με $D_f = \mathbb{R}$.

$$f(x) = x^4 - 9x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 3)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow \{x = 0 \text{ ή } x = 3 \text{ ή } x = -3\}$$

Διάστημα	$(-\infty, -3)$	$(-3, 0)$	$(0, 3)$	$(3, +\infty)$
Επιλεγμένος αριθμός x_0	-4	-1	1	4
$f(x_0)$	$16 \cdot (-7) \cdot (-1)$	$1 - 9 = -8$	$1 - 9 = -8$	$16 \cdot 1 \cdot 7$
Πρόσημο της f	+	-	-	+

4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = e^x + x - 1$, αν $D_f = [0, +\infty)$.

Λύση: Η συνάρτηση f **είναι συνεχής**, σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, της εκθετικής και μιας πολωνυμικής. Επίσης η f είναι **γνησίως αύξουσα**, αφού για κάθε $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$,

$$\text{με } x_1 < x_2, \text{ έχουμε: } x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} e^{x_1} < e^{x_2} \\ x_1 < x_2 \end{cases} \Rightarrow e^{x_1} + x_1 < e^{x_2} + x_2 \Rightarrow e^{x_1} + x_1 - 1 < e^{x_2} + x_2 - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$$\text{Έτσι, } f([0, +\infty)) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right) = [0, +\infty),$$

$$\text{αφού } f(0) = e^0 + 0 - 1 = 1 - 1 = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x - 1) \stackrel{\ll (+\infty) + (+\infty) \gg}{=} +\infty$$