

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

• Εφαπτομένη Καμπύλης

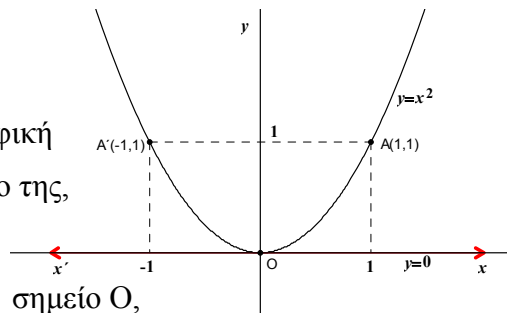
(i) Η καμπύλη **παραβολή**, με εξίσωση $y = x^2$, δηλαδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$, «δέχεται» στο σημείο της,

$O(0,0)$, **εφαπτομένη ευθεία** ε με εξίσωση $y = 0$.

Η ευθεία αυτή, είναι ο «άξονας των x », και χωρίζεται από το σημείο O ,

στις ημιευθείες Ox , και Ox' . Η **κλίση** της ευθείας ε , είναι $f'(0) = 0$, αφού $f'(x) = 2x$, και θα την λέμε **κλίση** της C_f στο σημείο O .

$$\varepsilon: y - 0 = 0(x - 0) \Leftrightarrow y = 0$$



Όπως είναι γνωστό, ο «άξονας των y », είναι **άξονας συμμετρίας** της **παραβολής**, και την χωρίζει σε δυο **συμμετρικά τμήματα**, που αν τα ονομάσουμε $\widehat{OA}$ και $\widehat{OA'}$, από δύο σημεία τους, θα μπορούσαμε να πούμε ότι έχουν αντίστοιχα, δικές τους «**ημιεφαπτόμενες**», τις ημιευθείες Ox , και Ox' . Οι δύο «**ημιεφαπτόμενες**», έχουν προφανώς τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, επομένως έχουν τον ίδιο φορέα, και αυτός είναι ο λόγος που υπάρχει η εφαπτομένη ε . Η **παραβολή**, αξίζει να χαρακτηριστεί σαν «**λεία**» καμπύλη, με την έννοια, ότι σε κάθε σημείο της, οι δύο «**ημιεφαπτόμενες**» είναι **αντικείμενες** ημιευθείες της ίδιας ευθείας, της εφαπτομένης. Προφανώς, οι δύο «**ημιεφαπτόμενες**», η καθεμιά για το «δικό της» τμήμα **καμπύλης**, «**έχουν το ρόλο οδηγού**», αφού μας βοηθάνε να ανασυνθέσουμε **με ακρίβεια** την καμπύλη, δηλαδή να την επαναφέρουμε σαν «**λεία**» καμπύλη, αν έχει «**σπάσει**» στα δυο προαναφερθέντα **τμήματά** της, αρκεί να τις «ευθυγραμμίσουμε». Το κριτήριο της «**ευθυγράμμισης δύο ημιεφαπτόμενων**», είναι αυτό που καθορίζει, αν οι **συνθέσεις** μας θα είναι «**λείες**» στο **σημείο** επαφής δυο καμπύλων τμημάτων, δηλαδή αν θα δέχονται **εφαπτομένη** στο **σημείο** αυτό, και στην περίπτωση που οι συνθέσεις μας πραγματοποιούνται σε περιβάλλον συστήματος συντεταγμένων, αν η συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει, είναι παραγωγίσιμη στην τετμημένη του **σημείου** επαφής.

(ii) Η καμπύλη, που είναι γραφική παράσταση της «κλαδικής» συνάρτησης $g(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$, «**προκύπτει πρακτικά**», με το αναποδογύρισμα του τμήματος $\widehat{OA'}$, της αρχικής παραβολής, με «**ευθυγραμμισμένες τις ημιεφαπτόμενες**».

Έτσι, με το παραπάνω κριτήριο, είναι «**λεία**», και επομένως «δέχεται»

στο σημείο της, $O(0,0)$, **εφαπτομένη ευθεία** ε με εξίσωση $y = 0$.

Τα παραπάνω επιβεβαιώνονται με τα εργαλεία της **«Ανάλυσης»**:

Το $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$, επιβεβαιώνει ότι

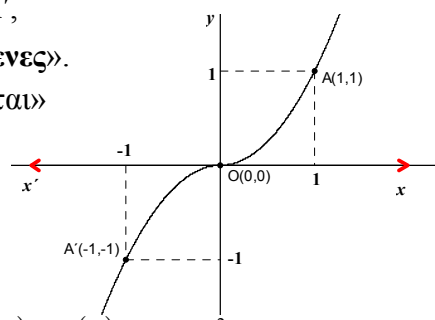
η «**ημιεφαπτομένη**» της $\widehat{OA'}$, στο $O(0,0)$, έχει **κλίση 0**, το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$, ότι η

«**ημιεφαπτομένη**» της $\widehat{OA}$, στο $O(0,0)$, έχει επίσης **κλίση 0**, και επομένως $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0$.

Έτσι, $g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0$, και συνεπώς η C_g «δέχεται» στο σημείο $O(0,0)$, **εφαπτομένη**

ευθεία ε με εξίσωση $y = 0$. (Οι δύο «**ημιεφαπτόμενες**», συναποτελούν την **εφαπτομένη ευθεία** ε .)

Σχόλιο: Η έννοια της «**ημιεφαπτομένης**» εισάγεται «άτυπα» στη σελίδα 93(σχήμα 6) του σχολικού βιβλίου, και προβάλλει σαν απαίτηση στη σελίδα 104, όταν εισάγεται ο ορισμός της «**παραγωγισιμότητας συνάρτησης** f , σε κλειστό διάστημα $[a, b] \subseteq D_f$ ».



(iii) Η καμπύλη, που είναι γραφική παράσταση της «κλαδικής» $h(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x^3, & x \geq 0 \end{cases}$,

«δέχεται» στο σημείο της, $O(0,0)$, **εφαπτομένη ευθεία** ε με εξίσωση $y=0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0,$$

$$\text{και επομένως } h'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = 0.$$

Τα δυο τμήματα της καμπύλης, παρουσιάζουν ίδια **κλίση** στο $O(0,0)$,

και αυτό πιστοποιεί ότι η καμπύλη είναι «**λεία**».

Σχόλιο: Οι καμπύλες με εξισώσεις $y = x^2$ και $y = x^3$, παρουσιάζονται

στο διπλανό σχήμα, με χρώματα μπλε και μαύρο αντίστοιχα, όπου φαίνονται τα κοινά τους σημεία, $K(1,1)$ και $O(0,0)$. Όπως γνωρίζουμε, για να βρούμε αλγεβρικά τα κοινά σημεία, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση: $x^3 = x^2$.

$$x^3 = x^2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ \text{ή} \\ x-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ή} \\ x = 1 \end{cases}$$

Η λύση $x = 0$, είναι προφανώς «**διπλή λύση**», αφού είναι λύση της $x \cdot x = 0$,

που για να θυμηθούμε πότε το πρωτακούσαμε, θα χαρακτηρίσουμε την εξίσωση $x^2 = 0$, δευτεροβάθμια με διακρίνουσα μηδέν.

Το σημείο $O(0,0)$, όπως ήδη έχουμε διαπιστώσει, προσφέρεται για «**συνοριακό σημείο**», όπου το πέρασμα από την μια καμπύλη στην άλλη, γίνεται σε «**λείο**» αποτέλεσμα, και αυτό είναι εξασφαλισμένο στα «**διπλά**» σημεία. Για να καταλάβουμε αυτή τη λειτουργία των «**διπλών**» σημείων, αρκεί να θυμηθούμε ότι η εφαπτομένη ορίστηκε, στη σελίδα 93, σαν οριακή θέση μιας τέμνουσας. Θα μπορούσαμε να πούμε, ότι μια τέμνουσα, γίνεται (εκφυλίζεται σε) εφαπτομένη, όταν τα δύο σημεία γίνουν ένα «**διπλό**».

Οι συναρτήσεις $f_1(x) = x^2$ και $f_2(x) = x^3$ που συνεισέφεραν στη δημιουργία της h , έδωσαν παραγωγίσιμη συνάρτηση, αφού «**διάλεξαν**» για συνοριακό σημείο, το «**διπλό**» σημείο $O(0,0)$, όπου $f_1'(0) = 2 \cdot 0 = 0 = 3 \cdot 0^2 = f_2'(0)$.

➤ Στο αμέσως παραπάνω σχήμα, φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\phi(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ x^3, & x \geq 1 \end{cases}$,

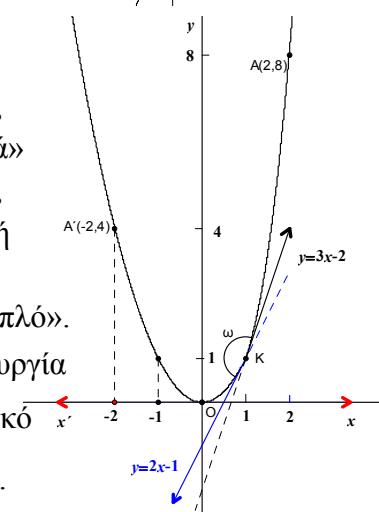
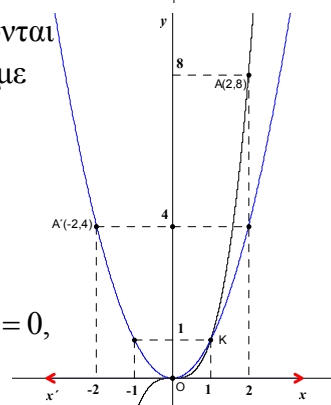
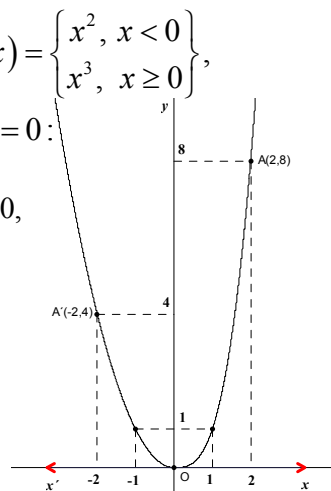
η «**ημιεφαπτομένη**» με εξίσωση $y = 2x - 1$, για την καμπύλη $\widehat{KA'}$, η «**ημιεφαπτομένη**» με εξίσωση $y = 3x - 2$, για την καμπύλη $\widehat{KA}$, και οι διακεκομμένες ευθείες τους. Οι «**ημιεφαπτόμενες**», είναι προφανώς **μη αντικείμενες ημιευθείες**, των οποίων η κυρτή γωνία είναι $\hat{\omega} = 172^\circ$.

Τα παραπάνω επιβεβαιώνονται με τα εργαλεία της «**Ανάλυσης**»:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\phi(x) - \phi(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 2 \neq 3 = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\phi(x) - \phi(1)}{x - 1},$$

και επομένως η ϕ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Οι συναρτήσεις $f_1(x) = x^2$ και $f_2(x) = x^3$ που συνεισέφεραν στη δημιουργία της ϕ , έδωσαν μη παραγωγίσιμη συνάρτηση, αφού «**διάλεξαν**» για συνοριακό σημείο, το σημείο $K(1,1)$, όπου $f_1'(1) = 2 \cdot 1 = 2 \neq 3 = 3 \cdot 1^2 = f_2'(1)$.



• Ασκήσεις Α' ομάδας - §2.1

2+5: Να βρείτε (αν υπάρχει) την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 , και στη συνέχεια, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f , (αν ορίζεται) στο $A(x_0, f(x_0))$.

i) $f(x) = x|x|$, $x_0 = 0$.

Λύση: Προφανώς $D_f = \mathbb{R}$, επομένως η f ορίζεται «κοντά στο $x_0 = 0$ », όπου επειδή $f(0) = 0 \cdot |0| = 0$, έχουμε $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \cdot |x| - 0}{x} = \frac{x \cdot |x|}{x} = |x|$, και αφού $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = |0| = 0$, επομένως υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \in \mathbb{R}$, και συνεπώς υπάρχει η παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο $x_0 = 0$, και είναι $f'(0) = 0$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f , στο $A(0, 0)$, είναι $\varepsilon_A : y = 0$, αφού για την εφαπτομένη ε_A , έχουμε: $y - 0 = f'(0) \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = 0 \cdot x \Leftrightarrow y = 0$

Σχόλιο: Η συνάρτηση f , είναι ίση με την $g(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$, που είδαμε στο (ii) της 1^{ης} σελίδας,

αφού για $x < 0 : |x| = -x$ και $f(x) = x \cdot |x| = x \cdot (-x) = -x^2$, και για $x \geq 0 : |x| = x$ και $f(x) = x \cdot |x| = x^2$.

Το «σπάσιμο» της καμπύλης με εξίσωση $y = x^2$, και η περιστροφή του τμήματος με τις αρνητικές τετμημένες, δεν επηρέασε την παραγωγισιμότητα, αφού η «ημιεφαπτομένη», βρίσκονταν πάνω στον «άξονα περιστροφής». Αυτό φάνηκε και από τη δυνατότητά μας, να επεξεργαστούμε «κοντά στο x_0 »,

το λόγο $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, χωρίς να χρειαστεί να εργαστούμε χωριστά στους «δυο κλάδους».

Η επεξεργασία του προαναφερθέντος λόγου, γίνεται για να αρθεί το πρόβλημα μηδενικού ορίου του παρονομαστή, και η ύπαρξη του απολύτου, πολλές φορές μας εμποδίζει να λύσουμε το πρόβλημα.

ii) $f(x) = |x - 1|$, $x_0 = 1$.

Λύση: Προφανώς $D_f = \mathbb{R}$, επομένως η f ορίζεται «κοντά στο $x_0 = 1$ »,

όπου επειδή $f(1) = |1 - 1| = |0| = 0$, έχουμε $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{|x - 1| - 0}{x - 1} = \frac{|x - 1|}{x - 1} (= \pm 1)$

$f(x) = \begin{cases} -(x - 1), & x < 1 \\ x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$, και έτσι «κοντά στο $x_0 = 1$ », και με $x < 1$: $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{-(x - 1)}{x - 1} = -1$,

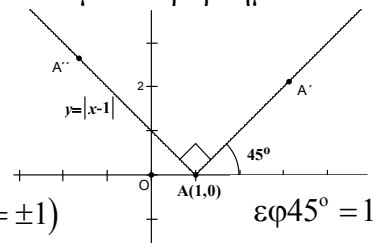
και συνεπώς $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-1) = -1$, ενώ «κοντά στο $x_0 = 1$ », και με $x > 1$:

$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x - 1}{x - 1} = 1$, και επομένως $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1$. Έτσι, η f δεν είναι παραγωγίσιμη

στο $x_0 = 1$, αφού $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -1 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$. * $\begin{cases} |x - 1| = x - 1 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ και} \\ |x - 1| = -(x - 1) \Leftrightarrow x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \end{cases}$

Σχόλιο: Στο σχήμα, μπορούμε να δούμε τη γραφική παράσταση, με τις δυο κάθετες ημιευθείες που έχουν κοινή αρχή το σημείο $A(1, 0)$. Οι δυο ημιευθείες έχουν σε όλα τα σημεία τους εφαπτομένη, την ευθεία που είναι ο φορέας τους. Η ημιευθείες AA' και AA'' , έχουν κλίσεις 1 και (-1) αντίστοιχα,

αφού $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -1$, και συνεπώς είναι κάθετες. $\boxed{1 \cdot (-1) = -1}$



iii) $f(x) = |x^2 - 3x|$, $x_0 = 1$.

Λύση: Προφανώς $D_f = \mathbb{R}$, επομένως η f ορίζεται «κοντά στο $x_0 = 1$ », όπου επειδή

$$f(1) = |1^2 - 3 \cdot 1| = |-2| = 2 \neq 0, \text{ έχουμε } \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{|x^2 - 3x| - 2}{x - 1}.$$

Αφού το $x_0 = 1$, δεν είναι ρίζα του δευτεροβάθμιου τριωνύμου $g(x) = 1 \cdot x^2 - 3x + 0$, υπάρχει υποσύνολο του D_g της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, όπου το δευτεροβάθμιο τριώνυμο, σαν συνεχής συνάρτηση έχει σταθερό πρόσημο.

$g(x) = x^2 - 3x = x \cdot (x - 3) = 0 \Leftrightarrow \{x = 0 \text{ ή } x = 3\}$, και συνεπώς αν $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$, τότε $x^2 - 3x < 0$, αφού το x , ως ευρισκόμενο ανάμεσα στις ρίζες του τριωνύμου, δίνει στο τριώνυμο πρόσημο **ετερόσημο** του **θετικού** αριθμού 1, που είναι συντελεστής του x^2 . Έτσι, για $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{|x^2 - 3x| - 2}{x - 1} = \frac{-(x^2 - 3x) - 2}{x - 1} = \frac{-(x^2 - 3x + 2)}{x - 1} = \frac{-(x - 1)(x - 2)}{x - 1} = -(x - 2) = -x + 2,$$

και επειδή $\lim_{x \rightarrow 1} (-x + 2) = 1$, επομένως $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1 \in \mathbb{R}$, και συνεπώς $f'(1) = 1$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας ε , στο σημείο της C_f , $A(1, 2)$, είναι:

$$y - 2 = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 2 = 1 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = x - 1 + 2 \Leftrightarrow y = x + 1$$

Σχόλιο: Οι συναρτήσεις που έχουν στον τύπο τους μεταβλητή παράσταση «μέσα σε απόλυτο», μπορούν να μας προβληματίσουν, στις ρίζες των μεταβλητών παραστάσεων που προαναφέραμε. Όπως είδαμε δεν είναι αναγκαία η προσφυγή στην αναλυτική **κλαδική** τους έκφραση.

Η κλαδική μορφή της συνάρτησης f , χρήσιμη στα $x_0 = 0$ ή $x_0 = 3$, είναι: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x < 0 \\ -x^2 + 3x, & 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 3x, & x > 3 \end{cases}$

Τέλος, εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι $\hat{\omega} = 45^\circ$.

Στην κλαδική μορφή, τα διαστήματα με ανοικτά άκρα, είναι δική μας επιλογή.

iv) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$.

Λύση: Προφανώς $D_f = \mathbb{R}$, και επομένως η f ορίζεται «κοντά στο $x_0 = 0$ ».

Πρώτα θα εξετάσουμε αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

«Κοντά στο $x_0 = 0$ », με $x < 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + x + 1) = 1$ και «κοντά στο $x_0 = 0$ », με $x > 0$:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1$, επίσης $f(0) = 0 + 1 = 1$, και συνεπώς η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

«Κοντά στο $x_0 = 0$ », με $x < 0$: $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 + x + 1 - 1}{x} = \frac{x(x + 1)}{x} = x + 1$, και επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 1) = 1$,

επομένως $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$. «Κοντά στο $x_0 = 0$ », με $x > 0$: $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x + 1 - 1}{x} = \frac{x}{x} = 1$, και

επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$, επομένως $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$. Άρα $f'(0) = 1$, και η εξίσωση της εφαπτομένης στο

σημείο της C_f , $A(0, 1)$, είναι: $y - 1 = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 1 = 1 \cdot x \Leftrightarrow y = x + 1$

Σχόλιο: Ο «δεξιός» κλάδος της f , έχει γραφική παράσταση **ημιευθεία**, επειδή το πολυώνυμο $p(x) = x + 1$ είναι πρωτοβάθμιο, και η **αντικείμενη** της ημιευθεία, που στο σχήμα φαίνεται διακεκομμένη με χρώμα μπλε, είναι η **«ημιεφαπτομένη»** του αριστερού κλάδου της C_f .

