

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Να εξετάσετε, αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sin x}{x}, & \text{αν } x < 0 \\ \frac{\eta\mu x}{2}, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη.

Σε κάθε περίπτωση να βρείτε, αν ορίζεται, τη συνάρτηση f' .

Λύση: Θα εξετάσουμε, αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

$$\text{Για } x \in (-1, 0): \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-\sin x}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x - 1}{x} = -0 = 0,$$

$$\text{για } x \in (0, 1): \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{2} = \frac{\eta\mu 0}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\text{και επειδή } f(0) = \frac{\eta\mu 0}{2} = 0, \text{ επομένως η } f \text{ είναι συνεχής στο } x_0 = 0.$$

Θα εξετάσουμε, αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Για } x \in (-1, 0): \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{\frac{1-\sin x}{x} - 0}{x} = \frac{1-\sin x}{x^2} = \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{x^2(1+\sin x)} = \frac{1-\sin^2 x}{x^2(1+\sin x)} = \\ &= \frac{\eta\mu^2 x}{x^2(1+\sin x)} = \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\sin x} \text{ και επειδή } \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 = 1^2 = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1+\sin x} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{επομένως } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\sin x} \right] = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Για } x \in (0, 1): \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\eta\mu x}{2} - 0}{x} = \frac{\eta\mu x}{2 \cdot x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \text{ και επειδή } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\eta\mu x}{x}\right) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{επομένως } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\eta\mu x}{x}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Έτσι, } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R} \text{ και επομένως υπάρχει η } f'(0) \text{ με } f'(0) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Επίσης έχουμε ότι, για κάθε } x \in (0, +\infty): f'(x) = \left(\frac{\eta\mu x}{2}\right)' = \frac{\sin x}{2} \text{ και για κάθε } x \in (-\infty, 0):$$

$$f'(x) = \left(\frac{1-\sin x}{x}\right)' = \frac{(1-\sin x)' \cdot x - (1-\sin x) \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\eta\mu x \cdot x - (1-\sin x) \cdot 1}{x^2} = \frac{x \cdot \eta\mu x + \sin x - 1}{x^2}.$$

$$\text{Συνεπώς η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη και } f'(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \eta\mu x + \sin x - 1}{x^2}, & \text{αν } x < 0 \\ \frac{\sin x}{2}, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

Σχόλια: (1) Στην περίπτωση μας, επειδή η f είναι παραγωγίσιμη, ισχύει $D_{f'} = D_f = \mathbb{R}$.

Γενικά, αν υπάρχει $f'(x_0)$ για ένα τουλάχιστο $x_0 \in D_f$,

τότε ορίζεται συνάρτηση $f': A_1 \rightarrow \mathbb{R}$ με $A_1 = \{x \in D_f \mid \text{υπάρχει η } f'(x)\} = D_{f'}$.

Προφανώς, όταν ορίζεται η f' θα ισχύει $D_{f'} \subseteq D_f$ και ενδιαφέρον για μας έχουν οι περιπτώσεις,

όπου τα $D_{f'}$ και D_f είναι διαστήματα ή ένωση διαστημάτων.

(2) Δεν είχαμε την υποχρέωση να εξετάσουμε την f , ως προς τη συνέχεια στο $x_0 = 0$.

Η εξέταση, για το αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in D_f$, συνήθως είναι πιο δύσκολη και εμείς ελπίζουμε να την αποφύγουμε, αν τύχει και η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 \in D_f$.

2. Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & \text{αν } x < \pi \\ \alpha x + \beta, & \text{αν } x \geq \pi \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = \pi$.

Λύση: Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0 = \pi$, **θα πρέπει** να είναι συνεχής στο $x_0 = \pi$.

Για να είναι η f συνεχής στο $x_0 = \pi$, «πρέπει και αρκεί» $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = f(\pi)$

και επειδή $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \eta\mu x = \eta\mu \pi = 0$, $\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} (\alpha x + \beta) = \alpha \cdot \pi + \beta$, $f(\pi) = \alpha \cdot \pi + \beta$, για να είναι η f συνεχής στο $x_0 = \pi$, «πρέπει και αρκεί» $\alpha \cdot \pi + \beta = 0$, δηλαδή $\beta = -\alpha \cdot \pi$.

Έτσι θα αναζητήσουμε τις τιμές των α, β , με δεδομένο ότι: $\beta = -\alpha \cdot \pi$ και $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & \text{αν } x < \pi \\ \alpha x - \alpha\pi, & \text{αν } x \geq \pi \end{cases}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = \pi$, «αν και μόνο αν» $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} \in \mathbb{R}$.

$$\text{Όμως, } \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\eta\mu x - 0}{x - \pi} = - \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\eta\mu(\pi - x)}{\pi - x} \stackrel{u = \pi - x}{=} - \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = -1$$

$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi^-} u &= u = \pi - x \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) = 0 \end{aligned}}$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\alpha x - \alpha\pi - 0}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\alpha(x - \pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \alpha = \alpha.$$

Συνεπώς, η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = \pi$, «αν και μόνο αν» $\alpha = -1$ και $\beta = -\alpha \cdot \pi$, δηλαδή «αν και μόνο αν» $\alpha = -1$ και $\beta = \pi$.

Σχόλια: (1) Επειδή το πρόβλημά μας είχε δυο παραμέτρους, χρειαστήκαμε δυο εξισώσεις για να βρούμε όλες τις λύσεις. Έτσι αναγκαστήκαμε, να χρησιμοποιήσουμε και την **αναγκαία** συνθήκη, προκειμένου η συνάρτησή μας να είναι παραγωγίσιμη, δηλαδή τη συνθήκη «να είναι η f συνεχής».

(2) Σε μια πιο «αυστηρή» παρουσίαση, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το «σχήμα»:

(«η f είναι παραγωγίσιμη») $\Leftrightarrow$ («η f είναι παραγωγίσιμη» **και** «η f είναι συνεχής»)

(3) Αν κάποιος θεωρούν δύσκολη, την επιλεκτική χρήση του «πρέπει» και του «πρέπει και αρκεί», δηλαδή του $(\Rightarrow)$ και του $(\Leftrightarrow)$, μπορούν να δηλώνουν μόνο «πρέπει».

Αυτοί όμως έχοντας συνείδηση, πως έτσι δηλώνουν, ότι οδηγούνται σε υπερσύνολο λύσεων, οφείλουν πριν κάνουν δεκτό ένα ζευγάρι (α, β) για λύση, να ελέγξουν με αντικατάσταση, αν είναι λύση.

3. Να βρεθεί η συνάρτηση f' , αν $f(x) = (\sqrt{x})^2$.

Λύση: Προφανώς $f(x) = x$, με $D_f = [0, +\infty)$ και $f'(x) = (x)' = 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Επίσης $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 = f'(0)$ και συνεπώς $f'(x) = 1$ με $D_{f'} = [0, +\infty)$.

4. Να βρεθεί η συνάρτηση f' , αν $f(x) = |x^3|$.

Λύση: $f(x) = |x^3| = \begin{cases} -x^3, & \text{αν } x < 0 \\ x^3, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$ και επομένως $f'(x) = \begin{cases} -3x^2, & \text{αν } x < 0 \\ 3x^2, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$. Επίσης

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^3|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 |x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x|x|) = 0 = f'(0) \text{ και συνεπώς } f'(x) = \begin{cases} -3x^2, & \text{αν } x < 0 \\ 3x^2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}.$$

Σχόλια: (1) Στην άσκηση 4, η f είναι σύνθεση της $h(x)=|x|$ και της $g(x)=x^3$, με $f=h \circ g$.

Στο $x_0=0$, υπάρχει η $g'(x_0)=g'(0)=3 \cdot 0^2=0$, ενώ όπως είναι γνωστό, δεν υπάρχει η παράγωγος

της h στο $g(x_0)=g(0)=0$. Παρόλα αυτά, υπάρχει η $(h \circ g)'(0)=f'(0)=0$.

(2) Για $f(x)=(\sqrt{x})^2=x$, με $D_f=[0,+\infty)$, ισχύει $f=h \circ g$, με $g(x)=\sqrt{x}$ και $h(x)=x^2$.

Όπως είναι γνωστό, δεν υπάρχει η παράγωγος της $g(x)=\sqrt{x}$ στο $x_0=0$, ενώ υπάρχει

η $h'(g(x_0))=h'(g(0))=h'(0)=2 \cdot 0=0$. Παρόλα αυτά, υπάρχει η $(h \circ g)'(0)=f'(0)=1$

(3) Γενικά, σε μια σύνθεση συναρτήσεων $f=h \circ g$, μπορεί να μην υπάρχουν,

η « $g'(x_0)$ », ή η « $h'(g(x_0))$ » και παρόλα αυτά να υπάρχει η $(h \circ g)'(x_0)=f'(x_0)$.

(4) Το γνωστό **Θεώρημα** λέει: «Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f \circ g)'(x_0)=f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Επίσης, με «αντιθετοαντιστροφή» έχουμε:

«Αν η συνάρτηση $f \circ g$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε είτε η συνάρτηση g δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , είτε η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$ ».

5. Να βρεθεί η συνάρτηση f' , αν $f(x)=|x^2-x \cdot \eta\mu x|$.

Λύση: Όπως είναι γνωστό, ισχύει $|\eta\mu x| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$|\eta\mu x| \leq |x| \Rightarrow |x| \cdot |\eta\mu x| \leq |x|^2 \Rightarrow |x \cdot \eta\mu x| \leq x^2 \Rightarrow -x^2 \leq x \cdot \eta\mu x \leq x^2 \Rightarrow 0 \leq x^2 - x \cdot \eta\mu x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{και επομένως } f(x)=|x^2-x \cdot \eta\mu x|=x^2-x \cdot \eta\mu x, \text{ με } D_f=\mathbb{R}.$$

Έτσι, υπάρχει η συνάρτηση f' , με $D_{f'}=\mathbb{R}$, αφού η f είναι παραγωγίσιμη, σαν άθροισμα

παραγωγίσιμων συναρτήσεων, στο $\mathbb{R}$, και $f'(x)=(x^2-x \cdot \eta\mu x)'=2 \cdot x-\eta\mu x-x \cdot \sigma\upsilon\nu x$.

Σημείωση: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$.

Προσοχή: $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha \cdot \gamma \geq \beta \cdot \gamma$ και $\alpha \geq \beta \Rightarrow \alpha \cdot \gamma \geq \beta \cdot \gamma$.

6. Να βρεθεί η συνάρτηση f' , αν $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$.

Λύση: $f(x)=\sqrt[3]{x^4}=\sqrt[3]{|x|^4}=\begin{cases} \sqrt[3]{(-x)^4}, & \text{αν } x < 0 \\ \sqrt[3]{x^4}, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$ και επομένως $f'(x)=\begin{cases} \frac{-4 \cdot \sqrt[3]{-x}}{3}, & \text{αν } x < 0 \\ \frac{4 \cdot \sqrt[3]{x}}{3}, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$.

• Για $x < 0$: $\left(\sqrt[3]{(-x)^4}\right)'=\left((-x)^{\frac{4}{3}}\right)'=\frac{4}{3} \cdot (-x)^{\frac{4}{3}-1} \cdot (-x)'=\frac{4}{3} \cdot (-x)^{\frac{1}{3}} \cdot (-1)=\frac{-4 \cdot \sqrt[3]{-x}}{3}$.

• Για $x > 0$: $\left(\sqrt[3]{x^4}\right)'=\left(x^{\frac{4}{3}}\right)'=\frac{4}{3} \cdot x^{\frac{4}{3}-1}=\frac{4}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}}=\frac{4 \cdot \sqrt[3]{x}}{3}$. $f(0)=\sqrt[3]{0^4}=0$

• Για $x_0=0$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{(-x)^4}}{x}=-\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{(-x)^4}}{-x}=-\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{(-x)^4}}{\sqrt[3]{(-x)^3}}=-\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{-x}=0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{x}=\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x^3}}=\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\frac{x^4}{x^3}}=\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x}=0 \text{ και συνεπώς } f'(0)=0.$$

✓ Υπάρχει η $f'(0)=0$, αφού η $g(x)=x^\alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ και $\alpha > 1$, είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$.

7. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$$\eta\mu^2 x - x^4 \leq x \cdot f(x) \leq \eta\mu^2 x + x^4, \text{ να αποδείξετε ότι (i) } f(0) = 0 \text{ και (ii) } f'(0) = 1.$$

Λύση: (i) Αφού η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ και $D_f = \mathbb{R}$, άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$.

$$\begin{aligned} \text{Για } x > 0: \quad \eta\mu^2 x - x^4 \leq x \cdot f(x) \leq \eta\mu^2 x + x^4 &\Rightarrow \frac{\eta\mu^2 x - x^4}{x} \leq \frac{x \cdot f(x)}{x} \leq \frac{\eta\mu^2 x + x^4}{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \eta\mu x - x^3 \leq f(x) \leq \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \eta\mu x + x^3 &\text{ και επειδή } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \eta\mu x - x^3 \right) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \eta\mu x + x^3 \right), \\ \text{από το «κριτήριο παρεμβολής», θα έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= 0 \text{ και συνεπώς } f(0) = 0. \end{aligned}$$

$$\textbf{Συμπλήρωμα:} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \eta\mu x \pm x^3 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \eta\mu x \pm \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 = 1 \cdot 0 \pm 0 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) «Κοντά στο } x_0 = 0\text{»}: \quad \eta\mu^2 x - x^4 \leq x \cdot f(x) \leq \eta\mu^2 x + x^4 &\Rightarrow \frac{\eta\mu^2 x - x^4}{x^2} \leq \frac{x \cdot f(x)}{x^2} \leq \frac{\eta\mu^2 x + x^4}{x^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\frac{\eta\mu x}{x} \right)^2 - x^2 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \left(\frac{\eta\mu x}{x} \right)^2 + x^2 &\Rightarrow \left(\frac{\eta\mu x}{x} \right)^2 - x^2 \leq \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq \left(\frac{\eta\mu x}{x} \right)^2 + x^2 \text{ και επειδή} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\eta\mu x}{x} \right)^2 - x^2 \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \right)^2 - \lim_{x \rightarrow 0} x^2 &= 1^2 - 0 = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\eta\mu x}{x} \right)^2 + x^2 \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \right)^2 + \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 1, \\ \text{από το «κριτήριο παρεμβολής», θα έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= 1 \text{ και συνεπώς } f'(0) = 1. \end{aligned}$$

8. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ και το σημείο $A(\xi, f(\xi))$, $\xi \neq 0$ της C_f . Να αποδείξετε ότι, η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(-\xi, 0)$ εφαπτεται της C_f στο A .

Λύση: Προφανώς $D_f = [0, +\infty)$ και όπως είναι γνωστό, $f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$ με $D_{f'} = (0, +\infty)$.

Έτσι για $\xi \neq 0$, υπάρχει εφαπτομένη της C_f στο A , με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'(\xi) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\xi}}$.

1η: Η ευθεία AB έχει εξίσωση: $y - f(\xi) = \frac{f(\xi) - 0}{\xi - (-\xi)}(x - \xi)$, δηλαδή $y - \sqrt{\xi} = \frac{\sqrt{\xi}}{2 \cdot \xi}(x - \xi)$,

$$\text{ισοδύναμα } y = \frac{\sqrt{\xi}}{2 \cdot \xi} x - \frac{\xi \sqrt{\xi}}{2 \cdot \xi} + \sqrt{\xi} \text{ και τελικά } y = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\xi}} \cdot x + \frac{\sqrt{\xi}}{2}.$$

Επειδή η ευθεία AB διέρχεται από το $A(\xi, f(\xi))$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\xi}} = f'(\xi)$, είναι εφαπτομένη της C_f στο A .

2η: Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ είναι: $y - f(\xi) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\xi}}(x - \xi)$,

$$\text{δηλαδή } y = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\xi}} \cdot x + \frac{\sqrt{\xi}}{2} \text{ και για } x = -\xi \text{ έχουμε } y = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\xi}} \cdot (-\xi) + \frac{\sqrt{\xi}}{2} = -\frac{\sqrt{\xi}}{2} + \frac{\sqrt{\xi}}{2} = 0.$$

Έτσι η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από το $B(-\xi, 0)$, και επειδή δύο (διαφορετικά) σημεία ορίζουν μία μόνο ευθεία, πρόκειται για την ευθεία AB .

$$\textbf{Συμπλήρωμα:} \quad y = \frac{\sqrt{\xi}}{2 \cdot \xi} x - \frac{\xi \sqrt{\xi}}{2 \cdot \xi} + \sqrt{\xi} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{\xi}}{2 \cdot (\sqrt{\xi})^2} x - \frac{\sqrt{\xi}}{2} + \sqrt{\xi} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\xi}} x + \frac{\sqrt{\xi}}{2}$$

Σχόλιο: Θα ασχοληθούμε με την εφαπτομένη της C_f στο $E(x_0, f(x_0))$, μόνο όταν υπάρχει η $f'(x_0)$, δηλαδή μόνο όταν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης, έχει συντελεστή διεύθυνσης.

9. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

(i) $f(x) = x^x$ με $D_f = (0, +\infty)$, (ii) $f(x) = (\ln x)^x$, με $D_f = (1, +\infty)$, (iii) $f(x) = x^{\ln x}$,

(iv) $f(x) = x^{\frac{1}{\ln x}}$ με $D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$, (v) $f(x) = 2^{5x-3}$, (vi) $f(x) = \eta\mu x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}$.

Λύση: (i) $f(x) = x^x$ με $D_f = (0, +\infty)$.

Προσοχή: Το 0^0 , δεν ορίζεται.

$$f(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \cdot \ln x} \text{ και επομένως } f'(x) = (x^x)' = (e^{x \cdot \ln x})' = e^{x \cdot \ln x} \cdot (x \cdot \ln x)' =$$

$$= x^x \cdot \left[(x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' \right] = x^x \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^x \cdot (\ln x + 1).$$

Συμπλήρωμα: $(e^{x \cdot \ln x})' \stackrel{x \cdot \ln x = u}{=} (e^u)' = e^u \cdot (u)' \stackrel{u = x \cdot \ln x}{=} e^{x \cdot \ln x} \cdot (x \cdot \ln x)'.$

Σχόλιο: Η συνάρτηση $f(x) = x^x$, ορίζεται και στους **αρνητικούς ακέραιους**, $\mathbb{Z}_-^* = \{-1, -2, -3, \dots\}$.

$$f(-1) = (-1)^{-1} = \frac{1}{-1} = -1, \quad f(-2) = (-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}, \dots, \text{ όμως η εργασία στο ευρύτερο δυνατό}$$

σύνολο ορισμού, $D_f = (0, +\infty) \cup \mathbb{Z}_-^*$, δεν παρουσιάζει ενδιαφέρον, ιδιαίτερα για μας, που έχουμε συμφωνήσει να επεξεργαζόμαστε συναρτήσεις, με πεδίο ορισμού **διάστημα ή ένωση διαστημάτων**.

Η $f(x) = x^x$ δεν είναι «**εκθετική συνάρτηση**» (έχει μεταβλητό εκθέτη και μεταβλητή βάση), δεν ορίζεται για αρνητικούς ρητούς, μη ακέραιους, αφού δεν ορίζεται ρίζα αρνητικού, ούτε για αρνητικούς άρρητους, αφού οι δυνάμεις με άρρητο εκθέτη, είναι όρια ακολουθιών, δυνάμεων με ρητό εκθέτη.

(ii) $f(x) = (\ln x)^x$, με $D_f = (1, +\infty)$. $f(x) = (\ln x)^x = e^{\ln((\ln x)^x)} = e^{x \cdot \ln(\ln x)}$ και επομένως,

$$\text{με } D_{f'} = (1, +\infty), \quad f'(x) = (e^{x \cdot \ln(\ln x)})' = e^{x \cdot \ln(\ln x)} \cdot (x \cdot \ln(\ln x))' = e^{x \cdot \ln(\ln x)} \left((x)' \cdot \ln(\ln x) + x \cdot (\ln(\ln x))' \right) =$$

$$= (\ln x)^x \left(\ln(\ln x) + x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot (\ln x)' \right) = (\ln x)^x \left(\ln(\ln x) + x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \right) = (\ln x)^x \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right).$$

Σχόλιο: $\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1$.

(iii) $f(x) = x^{\ln x}$, με $D_f = (0, +\infty)$. $f(x) = x^{\ln x} = e^{\ln(x^{\ln x})} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}$ και επομένως

$$f'(x) = (e^{\ln^2 x})' = e^{\ln^2 x} \cdot (\ln^2 x)' = e^{\ln^2 x} \cdot 2 \ln x \cdot (\ln x)' = x^{\ln x} \cdot 2 \ln x \cdot x^{-1} = 2 \cdot x^{\ln x - 1} \cdot \ln x, \text{ με } D_{f'} = (0, +\infty).$$

(iv) $f(x) = x^{\frac{1}{\ln x}}$ με $D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

$$f(x) = x^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\ln(x^{\frac{1}{\ln x}})} = e^{\frac{1}{\ln x} \cdot \ln x} = e^1 = e \text{ και επομένως } f'(x) = \left(x^{\frac{1}{\ln x}} \right)' = (e)' = 0.$$

Σχόλιο: $\ln x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

Προσοχή: Επειδή $\boxed{x^{\frac{1}{v}} = \sqrt[v]{x} \text{ με } v \in \mathbb{N}^* \text{ και } x \geq 0},$

είναι λάθος να γράφουμε $x^{\frac{1}{\ln x}} = \sqrt{\ln x}$, αφού ο $\ln x$ δεν είναι πάντα θετικός ακέραιος αριθμός.

(v) $f(x) = 2^{5x-3}$, με $D_f = \mathbb{R}$. $f'(x) = (2^{5x-3})' = 2^{5x-3} \cdot \ln 2 \cdot (5x-3)' = 2^{5x-3} \cdot 5 \ln 2$, με $D_{f'} = \mathbb{R}$.

(vi) $f(x) = \eta\mu x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}$, με $D_f = \mathbb{R}$. Με $D_{f'} = \mathbb{R}$, έχουμε:

$$f'(x) = (\eta\mu x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x})' = (\eta\mu x)' \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x} + \eta\mu x \cdot (e^{\sigma\upsilon\nu x})' =$$

$$= \sigma\upsilon\nu x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x} + \eta\mu x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x} (\sigma\upsilon\nu x)' = \sigma\upsilon\nu x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x} + \eta\mu x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x} (-\eta\mu x) = e^{\sigma\upsilon\nu x} \cdot (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu^2 x).$$

10. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = x^2 - x + 1$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο οι εφαπτομένες τους είναι κάθετες.

Απόδειξη: Για να έχουν οι C_f και C_g ένα μόνο κοινό σημείο,

«πρέπει και αρκεί», να υπάρχει μοναδικό $x_0 \in D = D_f \cap D_g = \mathbb{R}^* \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}^*$ με $f(x_0) = g(x_0)$,

δηλαδή η εξίσωση $f(x) = g(x)$ να έχει μια μόνο λύση στο σύνολο D .

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow 1 = x(x^2 - x + 1) \Leftrightarrow x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x-1) + 1 \cdot (x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x=1 \text{ και επομένως υπάρχει μοναδική λύση } x_0 = 1 \in D.$$

Επειδή $f(1) = \frac{1}{1} = 1$ [και $g(1) = 1^2 - 1 + 1 = 1$], άρα κοινό σημείο των C_f και C_g , είναι το $A(1,1)$.

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R}^*: f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \text{ και } g'(x) = (x^2 - x + 1)' = 2x - 1.$$

$$\text{Άρα } f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1 \text{ και } g'(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1.$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $A(1,1)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_f = f'(1) = -1$

και η εφαπτομένη της C_g στο $A(1,1)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_g = g'(1) = 1$.

Επειδή $\lambda_f \cdot \lambda_g = (-1) \cdot 1 = -1$, οι δυο ευθείες είναι κάθετες.

11. Αν $f(x) = x^2 + 2x + 2$ και $g(x) = -x^2 + 4x - 3$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει ευθεία,

η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1,4)$ και είναι κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g .

Απόδειξη: Προφανώς $D_f = D_g = \mathbb{R}$ και $f'(x) = 2x + 2$, $g'(x) = -2x + 4$, με $D_{f'} = D_{g'} = \mathbb{R}$.

Επίσης $A(1,4) \notin C_f$, αφού $f(1) = 5$ και $A(1,4) \notin C_g$, αφού $g(1) = 0$.

Για να είναι μια ευθεία (ϵ) κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g , διερχόμενη από το $A(1,4)$,

θα πρέπει να είναι εφαπτομένη της C_f , διερχόμενη από το $A(1,4)$,

δηλαδή να έχει εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R} = D_f$

$$\text{και να ισχύει: } \boxed{4 - f(x_0) = f'(x_0)(1 - x_0)}.$$

$$4 - f(x_0) = f'(x_0)(1 - x_0) \Leftrightarrow 4 - (x_0^2 + 2x_0 + 2) = (2x_0 + 2)(1 - x_0) \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ \text{ή } x_0 = 2 \end{cases}$$

$$\text{Έχουμε: } f(0) = 2, f'(0) = 2 \text{ και } f(2) = 10, f'(2) = 6.$$

Επομένως υπάρχουν δυο εφαπτόμενες της C_f , διερχόμενες από το $A(1,4)$,

$$\eta \epsilon_1: y - 2 = 2(x - 0) \Leftrightarrow y = 2x + 2 \text{ και } \eta \epsilon_2: y - 10 = 6(x - 2) \Leftrightarrow y = 6x - 2.$$

(α) Για να είναι η $\epsilon_1: y = 2x + 2$ εφαπτομένη της C_g , «πρέπει και αρκεί» να υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R} = D_g$,

$$\text{έτσι ώστε } \begin{cases} g'(x_1) = 2 \text{ και} \\ g(x_1) = 2x_1 + 2 \end{cases}, \text{ δηλαδή } \begin{cases} -2x_1 + 4 = 2 \text{ και} \\ -x_1^2 + 4x_1 - 3 = 2x_1 + 2 \end{cases} \text{ και ισοδυνάμως } \begin{cases} x_1 = 1 \text{ και} \\ x_1^2 - 2x_1 + 5 = 0 \end{cases}.$$

Δεν υπάρχει τέτοιο $x_1 \in \mathbb{R} = D_g$, αφού η διακρίνουσα της $x_1^2 - 2x_1 + 5 = 0$ είναι αρνητική

και συνεπώς η $\epsilon_1: y = 2x + 2$, **δεν είναι** κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g .

(β) Για να είναι η $\epsilon_2: y = 6x - 2$ εφαπτομένη της C_g , «πρέπει και αρκεί» να υπάρχει $x_2 \in \mathbb{R} = D_g$,

$$\text{έτσι ώστε } \begin{cases} g'(x_2) = 6 \text{ και} \\ g(x_2) = 6x_2 - 2 \end{cases}. \text{ Όμως, } \begin{cases} -2x_2 + 4 = 6 \text{ και} \\ -x_2^2 + 4x_2 - 3 = 6x_2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -1 \text{ και} \\ x_2^2 + 2x_2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_2 = -1$$

και επομένως η $\epsilon_2: y = 6x - 2$ είναι κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g , διερχόμενη από το $A(1,4)$.

Σχόλιο: Αν επαναλάβουμε για την g , τη διαδικασία που μας έδωσε τις δυο εφαπτόμενες της C_f τις διερχόμενες από το $A(1,4)$, θα βρούμε ότι οι δυο εφαπτόμενες της C_g που διέρχονται από το $A(1,4)$,

$$\text{είναι η } \varepsilon_3: y = -2x + 6 \text{ και η } \varepsilon_4: y = 6x - 2.$$

Θα διαπιστώσουμε και πάλι, ότι κοινή εφαπτομένη υπάρχει και είναι η $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon_4: y = 6x - 2$.

Και στις δυο περιπτώσεις, η εύρεση κοινής εφαπτομένης, μας δίνει το δικαίωμα να πούμε, ότι αποδείξαμε πως υπάρχει κοινή εφαπτομένη.

Σε κάθε περίπτωση, γνωρίζουμε και τα σημεία επαφής με τις C_f, C_g . Το κοινό σημείο της

$$\varepsilon_2 \equiv \varepsilon_4: y = 6x - 2 \text{ με την } C_f \text{ είναι το } E(2,10) \text{ και με την } C_g \text{ το } E'(-1,-8).$$

(Κοινή εφαπτομένη, σε διαφορετικά σημεία)

12. Αν $f(x) = x^2 + 2x + 2$ και $g(x) = -x^2 + 4x - 3$,

να βρεθούν οι κοινές εφαπτόμενες των C_f και C_g .

Λύση: Προφανώς $D_f = D_g = \mathbb{R}$ και $f'(x) = 2x + 2$, $g'(x) = -2x + 4$, με $D_{f'} = D_{g'} = \mathbb{R}$.

Για να υπάρχουν κοινές εφαπτόμενες των C_f και C_g ,

«πρέπει και αρκεί» να υπάρχουν $x_1 \in \mathbb{R} = D_f$ και $x_2 \in \mathbb{R} = D_g$,

για τα οποία να ταυτίζονται οι ευθείες $\varepsilon: y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$ και $\varepsilon': y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2)$,

δηλαδή το σύστημα $\{y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \text{ και } y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2)\}$ να είναι αόριστο.

$$\begin{cases} y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \\ y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - (x_1^2 + 2x_1 + 2) = (2x_1 + 2)(x - x_1) \\ y - (-x_2^2 + 4x_2 - 3) = (-2x_2 + 4)(x - x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (2x_1 + 2)x + (-x_1^2 + 2) \\ y = (-2x_2 + 4)x + (x_2^2 - 3) \end{cases}$$

Έτσι, για να ταυτίζονται οι ευθείες (ε) και (ε') «πρέπει και αρκεί»,

$$\text{να έχει λύση το σύστημα } \begin{cases} 2x_1 + 2 = -2x_2 + 4 \text{ και} \\ -x_1^2 + 2 = x_2^2 - 3 \end{cases}, \text{ δηλαδή το } \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \text{ και} \\ x_1^2 + x_2^2 = 5 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \text{ και} \\ x_1^2 + x_2^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - x_2 \text{ και} \\ (1 - x_2)^2 + x_2^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - x_2 \text{ και} \\ x_2^2 - x_2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - x_2 \text{ και} \\ \{x_2 = -1 \text{ ή } x_2 = 2\} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \{x_1 = 2 \text{ και } x_2 = -1\} \\ \text{ή } \{x_1 = -1 \text{ και } x_2 = 2\} \end{cases} \begin{matrix} \text{Για } \{x_1 = 2 \text{ και } x_2 = -1\} \text{ έχουμε, } \varepsilon_1 \equiv \varepsilon'_1: y = 6x - 2 \\ \text{Για } \{x_1 = -1 \text{ και } x_2 = 2\} \text{ έχουμε, } \varepsilon_2 \equiv \varepsilon'_2: y = 1 \end{matrix}$$

Συνεπώς κοινές εφαπτόμενες των C_f και C_g , είναι οι ευθείες, $\varepsilon_1: y = 6x - 2$ και $\varepsilon_2: y = 1$.

Συμπλήρωμα: $f(2) = 10$, $f'(2) = 6$, $g(-1) = -8$, $g'(-1) = 6$

$$\text{και } f(-1) = 1, f'(-1) = 0, g(2) = 1, g'(2) = 0.$$

Σχόλιο: Δυο ευθείες $\varepsilon: y = \lambda \cdot x + \beta$ και $\varepsilon': y = \lambda' \cdot x + \beta'$ ταυτίζονται,

«τότε και μόνον τότε» αν $\lambda = \lambda'$ και $\beta = \beta'$.

13. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = ax^2 + \beta x + 2$ και $g(x) = \frac{1}{x}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τα

οποία οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.

Λύση: Προφανώς $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R}^*$ και $f'(x) = 2ax + \beta$, $g'(x) = \frac{-1}{x^2}$, με $D_{f'} = \mathbb{R}$, $D_{g'} = \mathbb{R}^*$.

Οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$,

«τότε και μόνον τότε» αν $f(1) = g(1)$ και $f'(1) = g'(1)$.

$$\begin{cases} f(1) = g(1) \text{ και} \\ f'(1) = g'(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2 = 1 \text{ και} \\ 2\alpha + \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + (-1 - 2\alpha) + 2 = 1 \text{ και} \\ \beta = -1 - 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \text{ και} \\ \beta = -1 \end{cases}$$

Σχόλιο: Στην άσκηση αυτή, είχαμε κοινή εφαπτομένη, σε κοινό σημείο.

14. Έστω μια συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f'(1)=1$

και g η συνάρτηση που ορίζεται από την ισότητα $g(x) = f(x^2 + x + 1) - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$, εφάπτεται της C_g στο $B(0, g(0))$.

Απόδειξη: Προφανώς $D_f = D_g = \mathbb{R}$ και $D_{f'} = \mathbb{R}$. Έτσι, θα έχουμε και $D_{g'} = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = (f(x^2 + x + 1) - 1)' = f'(x^2 + x + 1) \cdot (x^2 + x + 1)' = f'(x^2 + x + 1) \cdot (2x + 1)$.

Έτσι, $g(0) = f(0^2 + 0 + 1) - 1 = f(1) - 1$ και $g'(0) = f'(0^2 + 0 + 1) \cdot (2 \cdot 0 + 1) = f'(1) \cdot 1 = f'(1) = 1$.

➤ Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $A(1, f(1))$ είναι:

$\varepsilon: y - f(1) = f'(1)(x - 1)$, δηλαδή $\varepsilon: y = 1 \cdot (x - 1) + f(1)$ ή αλλιώς $\varepsilon: y = x - 1 + f(1)$.

➤ Η εξίσωση εφαπτομένης της C_g στο $B(0, g(0))$ είναι:

$\varepsilon': y - g(0) = g'(0)(x - 0)$, δηλαδή $\varepsilon': y - (f(1) - 1) = 1 \cdot x$ ή αλλιώς $\varepsilon': y = x - 1 + f(1)$.

Προφανώς πρόκειται για την ίδια ευθεία, και συνεπώς η ευθεία $\varepsilon \equiv \varepsilon': y = x - 1 + f(1)$

η οποία εφάπτεται της C_f στο $A(1, f(1))$, εφάπτεται της C_g στο $B(0, g(0))$.

15. Έστω μια συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, 1)$, για την οποία ισχύει:

$$f(\eta\mu x) = e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x, \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

(i) Να βρείτε την $f'(0)$.

(ii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $A(0, f(0))$,

σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

Λύση: Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, προφανώς $\eta\mu x \in (-1, 1)$ και επομένως υπάρχει η $f'(\eta\mu x)$.

Άρα, για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, θα έχουμε $(f(\eta\mu x))' = f'(\eta\mu x) \cdot (\eta\mu x)' = f'(\eta\mu x) \cdot \sigma\upsilon\nu x$.

Όμως για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $(f(\eta\mu x))' = (e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x)' = (e^x)' \cdot \sigma\upsilon\nu x + e^x \cdot (\sigma\upsilon\nu x)' = e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - e^x \cdot \eta\mu x$.

Έτσι, για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, θα έχουμε: $f'(\eta\mu x) \cdot \sigma\upsilon\nu x = e^x \cdot (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)$.

(i) Για $x = 0$, $f'(\eta\mu 0) \cdot \sigma\upsilon\nu 0 = e^0 \cdot (\sigma\upsilon\nu 0 - \eta\mu 0)$, δηλαδή $f'(0) \cdot 1 = 1 \cdot (1 - 0)$ και συνεπώς $f'(0) = 1$,

και $f(\eta\mu 0) = e^0 \cdot \sigma\upsilon\nu 0$, δηλαδή $f(0) = 1 \cdot 1$ και έτσι $f(0) = 1$.

(ii) Η εφαπτομένη της C_f στο $A(0, f(0))$, έχει εξίσωση $\varepsilon: y - f(0) = f'(0)(x - 0)$,

δηλαδή $\varepsilon: y - 1 = x$ και επομένως $\varepsilon: y = x + 1$.

Το σημείο $A(0, f(0)) \equiv A(0, 1)$ είναι το κοινό σημείο της (ε) με τον άξονα yy' .

Για $y = 0$ στην (ε) , προκύπτει $x = -1$ και το $B(-1, 0)$ είναι το κοινό σημείο της (ε) με τον xx' .

Το τρίγωνο **OAB**, με $O(0, 0)$, είναι ισοσκελές, αφού $(OA) = 1$ και $(OB) = 1$.

16. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2 \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)$.

Λύση: Προφανώς $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}^*$. $f'(x) = \left(x^2 \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = (x^2)' \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \left(\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right)' =$

$$= 2x \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = 2x \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right).$$