

Μονοτονία και Ακρότατα – Κυρτότητα και Σημεία Καμπής

1. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x + 1$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$.

Να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων.

Λύση: Η f είναι πολυωνυμική, με $f'(x) = (\alpha x^3 + \beta x^2 - 3x + 1)' = 3\alpha x^2 + 2\beta x - 3$ και $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οι μόνες πιθανές θέσεις ακροτάτων, είναι οι ρίζες της f' .

Έτσι, για να παρουσιάζει η f τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$, **πρέπει** $f'(-1) = 0 = f'(1)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(-1) = 0 \\ \text{και} \\ f'(1) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3\alpha(-1)^2 + 2\beta(-1) - 3 = 0 \\ \text{και} \\ 3\alpha \cdot 1^2 + 2\beta \cdot 1 - 3 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3\alpha - 2\beta - 3 = 0 \\ \text{και} \\ 3\alpha + 2\beta - 3 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3\alpha - 2\beta - 3 = 0 \\ \text{και} \\ 6\alpha - 6 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 - 2\beta - 3 = 0 \\ \text{και} \\ \alpha = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta = 0 \\ \text{και} \\ \alpha = 1 \end{array} \right\}$$

Για $\{\alpha = 1 \text{ και } \beta = 0\}$ θα έχουμε: $f(x) = x^3 - 3x + 1$ και $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$.

Επειδή η f' είναι συνεχής, σαν πολυωνυμική, «διατηρεί πρόσημο» σε καθένα από τα διαστήματα, στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f' χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Άρα στο $x_1 = -1$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο,

το $f(-1) = 3$

και στο $x_2 = 1$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, το $f(1) = -1$.

Έτσι τα $\{\alpha = 1 \text{ και } \beta = 0\}$, είναι οι ζητούμενες τιμές.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\nearrow$ 3 T.M.	$\searrow$ -1 T.E.	$\nearrow$	

Σχόλια: (1) Όταν μια συνάρτηση ορίζεται σε διάστημα, **πιθανές θέσεις ακροτάτων** σε αυτό, είναι:

- Τα **εσωτερικά** σημεία του διαστήματος, που είναι **ρίζες** της πρώτης παραγώγου.
- Τα **εσωτερικά** σημεία του διαστήματος, στα οποία **δεν υπάρχει** η πρώτη παράγωγος.
- Τα «**κλειστά άκρα**» του διαστήματος. (εννοείται αν υπάρχουν τέτοια)

Στην περίπτωσή μας, δεν υπήρχαν σημεία των δυο τελευταίων κατηγοριών.

(2) Γράψαμε «**πρέπει** ...», αφού όπως είναι γνωστό, **δεν αρκεί** ένα στοιχείο του πεδίου ορισμού να είναι ρίζα της πρώτης παραγώγου, για να είναι θέση τοπικού ακροτάτου.

Αυτό, μας υποχρέωσε να **ελέγξουμε** τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ που βρήκαμε.

2. Να αποδείξετε ότι, αν για μια συνάρτηση f , που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ισχύει

$$2f^3(x) + 6f(x) = 2x^3 + 6x + 1, \text{ τότε η } f \text{ δεν έχει ακρότατα.}$$

Απόδειξη: Επειδή $D_{f'} = \mathbb{R}$, οι μόνες πιθανές θέσεις ακροτάτων, είναι οι ρίζες της f' .

Αφού όλες οι «επιμέρους» συναρτήσεις, στην $2f^3(x) + 6f(x) = 2x^3 + 6x + 1$, είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$,

επομένως $(2f^3(x) + 6f(x))' = (2x^3 + 6x + 1)'$ και συνεπώς $2(f^3(x))' + 6f'(x) = 6x^2 + 6$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Όμως, } 2(f^3(x))' + 6f'(x) = 6x^2 + 6 \Rightarrow 6f^2(x) \cdot f'(x) + 6f'(x) = 6x^2 + 6 \Rightarrow f'(x)(f^2(x) + 1) = x^2 + 1.$$

Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$, με $f'(x_0) = 0$.

Τότε, από την $f'(x_0)(f^2(x_0) + 1) = x_0^2 + 1$, προκύπτει η $0 \cdot (f^2(x_0) + 1) = x_0^2 + 1$ και επομένως $x_0^2 + 1 = 0$.

ΑΤΟΠΟ, αφού η εξίσωση $x^2 + 1 = 0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Άρα δεν υπάρχουν ρίζες της f' και συνεπώς η f δεν έχει ακρότατα.

Σχόλια: (1) Όταν δυο συναρτήσεις είναι ίσες, για να είναι ίσες οι παράγωγοί τους, θα πρέπει να υπάρχουν.

Έτσι, πριν παραγωγίσουμε «και τα δύο μέλη», θα πρέπει να έχουμε εξετάσει, αν υπάρχουν οι παράγωγοι.

(2) Στο «τελείωμα» της λύσης, θα μπορούσαμε να είχαμε πει: «Επειδή $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x)(f^2(x) + 1) = x^2 + 1$,

για να είναι $f'(x) = 0$, **πρέπει** $f'(x)(f^2(x) + 1) = 0$, δηλαδή $x^2 + 1 = 0$, ...»

3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$, έχει για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, ακριβώς ένα σημείο καμπής, που βρίσκεται στην παραβολή $y = -x^2 + 2$.

Απόδειξη: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, η $f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$, είναι προφανώς δυο φορές παραγωγίσιμη,

$$\text{με } D_f = D_{f'} = D_{f''} = \mathbb{R} \text{ και } f'(x) = (2e^{x-\alpha} - x^2)' = 2e^{x-\alpha} - 2x, \quad f''(x) = (2e^{x-\alpha} - 2x)' = 2e^{x-\alpha} - 2.$$

Επειδή η f'' ορίζεται στο $\mathbb{R}$, οι μόνες **πιθανές θέσεις σημείων καμπής** της C_f , είναι οι **ρίζες** της f'' .

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} - 2 = 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} = 2 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} = 1 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} = e^{0 \stackrel{g(x)=e^x(1-1)}{\Rightarrow}} \Leftrightarrow x - \alpha = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$$

Επομένως, η μοναδική **πιθανή θέση σημείου καμπής** της C_f , είναι η $x_0 = \alpha$.

$$\text{Για } x \in (-\infty, \alpha): x < \alpha \Rightarrow x - \alpha < 0 \stackrel{g(x)=e^x \nearrow}{\Leftrightarrow} e^{x-\alpha} < e^0 \Rightarrow e^{x-\alpha} < 1 \Rightarrow 2e^{x-\alpha} < 2 \Rightarrow 2e^{x-\alpha} - 2 < 0 \Rightarrow f''(x) < 0.$$

$$\text{Για } x \in (\alpha, +\infty): x > \alpha \Rightarrow x - \alpha > 0 \stackrel{g(x)=e^x \nearrow}{\Leftrightarrow} e^{x-\alpha} > e^0 \Rightarrow e^{x-\alpha} > 1 \Rightarrow 2e^{x-\alpha} > 2 \Rightarrow 2e^{x-\alpha} - 2 > 0 \Rightarrow f''(x) > 0.$$

Επειδή υπάρχει η $f'(\alpha)$, επομένως ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$

και επειδή η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του $x_0 = \alpha$, επομένως το $A(\alpha, f(\alpha))$ είναι σημείο καμπής.

Έτσι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

$$\text{Επειδή } f(\alpha) = 2e^{\alpha-\alpha} - \alpha^2 = 2e^0 - \alpha^2 = 2 - \alpha^2 = -\alpha^2 + 2 \Rightarrow \boxed{f(\alpha) = -\alpha^2 + 2},$$

προφανώς το $A(\alpha, f(\alpha))$ βρίσκεται πάνω στην παραβολή $y = -x^2 + 2$.

4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in (-2, 2)$, η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2\alpha x^3 + 6x^2 + 2x + 1$ είναι κυρτή σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

Απόδειξη: Προφανώς, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x^4 - 2\alpha x^3 + 6x^2 + 2x + 1)' = 4x^3 - 6\alpha x^2 + 12x + 2$

$$\text{και } f''(x) = (4x^3 - 6\alpha x^2 + 12x + 2)' = 12x^2 - 12\alpha x + 12 = 12(x^2 - \alpha x + 1).$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - \alpha x + 1$, είναι $\Delta = \alpha^2 - 4$ και για κάθε $\alpha \in (-2, 2)$ θα έχουμε

$\Delta = \alpha^2 - 4 < 0$, αφού για τιμές «εντός των ριζών» το ελλιπές τριώνυμο $1 \cdot \alpha^2 - 4$ θα είναι ετερόσημο του 1. Έτσι, αφού για κάθε $\alpha \in (-2, 2)$, έχουμε $\Delta = \alpha^2 - 4 < 0$, το τριώνυμο $1 \cdot x^2 - \alpha x + 1$ θα είναι $\forall x \in \mathbb{R}$ ομόσημο του 1, δηλαδή $x^2 - \alpha x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ και επομένως $f''(x) = 12(x^2 - \alpha x + 1) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς, η f θα είναι κυρτή σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

5. Έστω f μια συνάρτηση, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$, για την οποία ισχύει

$$f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0. \text{ Να αποδείξετε ότι η } f \text{ δεν έχει σημεία καμπής.}$$

Απόδειξη: Επειδή η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$,

οι μόνες **πιθανές θέσεις σημείων καμπής** της C_f , είναι οι **ρίζες** της f'' στο $(-2, 2)$.

Αφού όλες οι «επιμέρους» συναρτήσεις, στην $f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$, είναι παραγωγίσιμες στο $(-2, 2)$,

$$\text{επομένως } (f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3)' = (0)' \text{ και συνεπώς } 2f(x)f'(x) - 2f'(x) + 2x = 0.$$

$$\text{Ομοίως, } (2f(x)f'(x) - 2f'(x) + 2x)' = (0)' \text{ και συνεπώς } 2f'(x)f'(x) + 2f(x)f''(x) - 2f''(x) + 2 = 0.$$

$$\text{Έστω ότι υπάρχει } x_0 \in \mathbb{R}, \text{ με } f''(x_0) = 0.$$

$$\text{Τότε, από την } f'(x_0)f'(x_0) + f(x_0)f''(x_0) - f''(x_0) + 1 = 0, \text{ προκύπτει } f'(x_0)f'(x_0) + f(x_0) \cdot 0 - 0 + 1 = 0$$

$$\text{και επομένως } (f'(x_0))^2 + 1 = 0. \text{ ΑΤΟΠΟ, αφού η εξίσωση } y^2 + 1 = 0 \text{ είναι αδύνατη στο } \mathbb{R}.$$

Άρα δεν υπάρχουν ρίζες της f'' στο $(-2, 2)$, και έτσι «η f δεν έχει σημεία καμπής».

Σχόλια: (1) Όταν μια συνάρτηση ορίζεται σε διάστημα, **πιθανές θέσεις σημείων καμπής** σε αυτό, είναι:

- Τα **εσωτερικά** σημεία του διαστήματος, που είναι **ρίζες** της δεύτερης παραγώγου.
- Τα **εσωτερικά** σημεία του διαστήματος, στα οποία **δεν υπάρχει** η δεύτερη **παραγώγος**.

(2) Αν $x_0 \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, τότε η εξίσωση $y^2 - 2y + x_0^2 - 3 = 0$ είναι αδύνατη.

$$\Delta = 4 - 4(x_0^2 - 3) = 4 - 4x_0^2 + 12 = -4x_0^2 + 16 = -4(x_0^2 - 4) \text{ και έτσι ισχύει } \Delta \geq 0 \Leftrightarrow x_0 \in [-2, 2].$$

Άρα, η f που ικανοποιεί τη σχέση $f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$, δεν ορίζεται στο $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

Επίσης, μια τέτοια συνάρτηση f , δεν παραγωγίζεται στα $x_1 = -2$ και $x_2 = 2$,

$$\text{αφού ο τύπος της, προκύπτει από τη σχέση } f(x) = \frac{2 \pm \sqrt{4(4-x^2)}}{2} = 1 \pm \sqrt{4-x^2}.$$

Προφανώς, δεν έχει να κάνει με τις εξετάσεις, ένα τέτοιο σχόλιο. Στις εξετάσεις, θεωρούμε δεδομένη την ορθότητα της εκφώνησης και δεν έχουμε τη φιλοδοξία να βρούμε πιθανά λάθη στα θέματα.

6. (i) Να αποδείξετε ότι η $f(x) = e^x$ είναι κυρτή, ενώ η $g(x) = \ln x$ είναι κοίλη.

(ii) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,1)$ και της C_g στο $B(1,0)$.

(iii) Να αποδείξετε ότι $e^x \geq x+1, \forall x \in \mathbb{R}$ και $\ln x \leq x-1, \forall x \in (0, +\infty)$.

Πότε ισχύουν οι ισότητες;

(iv) Να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g .

Απόδειξη: (i) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x$ και $f''(x) = e^x > 0$ και συνεπώς η f είναι κυρτή.

$$\forall x \in (0, +\infty), g'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x} \text{ και } g''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0 \text{ και συνεπώς η } g \text{ είναι κοίλη.}$$

(ii) $f(0) = e^0 = 1$ και $f'(0) = e^0 = 1$, επομένως $A(0,1) \in C_f$ και συνεπώς η εξίσωση εφαπτομένης, της C_f στο σημείο $A(0,1)$, είναι η $y-1 = f'(0)(x-0)$, δηλαδή η $y = x+1$.

$$g(1) = \ln 1 = 0 \text{ και } g'(1) = \frac{1}{1} = 1, \text{ επομένως } B(1,0) \in C_g \text{ και συνεπώς η εξίσωση εφαπτομένης,}$$

$$\text{της } C_g \text{ στο σημείο } B(1,0), \text{ είναι η } y-0 = g'(1)(x-1), \text{ δηλαδή η } y = x-1.$$

(iii) Επειδή η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, επομένως η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,1)$, η $y = x+1$, βρίσκεται «**κάτω**» από την C_f , με εξαίρεση το σημείο επαφής. Έτσι για την $y = x+1$ θα έχουμε:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq y \Leftrightarrow e^x \geq x+1} \text{ και } \boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) > y \Leftrightarrow e^x > x+1} \text{ και } \boxed{e^x = x+1 \Leftrightarrow x=0}$$

Επειδή η g είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$, επομένως η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $B(1,0)$, η $y = x-1$, βρίσκεται «**πάνω**» από την C_g , με εξαίρεση το σημείο επαφής. Έτσι για την $y = x-1$ θα έχουμε:

$$\boxed{\forall x \in (0, +\infty), g(x) \leq y \Leftrightarrow \ln x \leq x-1} \text{ και } \boxed{\forall x \in (0, +\infty) - \{1\}, \ln x < x-1} \text{ και } \boxed{\ln x = x-1 \Leftrightarrow x=1}$$

(iv) $\forall x \in \mathbb{R}$, θα έχουμε $x-1 < x+1$, αφού $x-1 < x+1 \Leftrightarrow 0 \cdot x < 2$.

Επειδή $\forall x \in \mathbb{R}$, ισχύει $e^x \geq x+1$, επομένως θα ισχύει και $e^x \geq x+1, \forall x \in (0, +\infty)$, ομοίως θα έχουμε $x-1 < x+1, \forall x \in (0, +\infty)$ και αφού ισχύει $\ln x \leq x-1, \forall x \in (0, +\infty)$ τελικά θα έχουμε ότι:

$$\forall x \in (0, +\infty), \ln x \leq x-1 < x+1 \leq e^x \text{ και συνεπώς } e^x > \ln x, \forall x \in (0, +\infty).$$

Έτσι προφανώς η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g .

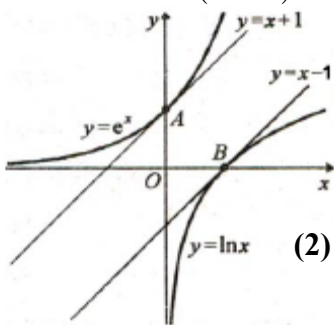
Σχόλια: (1) Όταν λέμε ότι η « C_f βρίσκεται **πάνω** από την C_g »,

«αλγεβρικά» εννοούμε ότι $f(x) > g(x), \forall x \in D_f \cap D_g$.

(2) Εννοείται, ότι αν μπορούμε να διαχειριστούμε απευθείας τη σχέση, το κάνουμε.

Έτσι, θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι $\forall x \in (0, +\infty)$, ισχύει $e^x > \ln x$,

αποδεικνύοντας ότι ισχύει $h(x) = e^x - \ln x > 0, \forall x \in (0, +\infty)$.



$$h'(x) = (e^x - \ln x)' = e^x - \frac{1}{x} \text{ και } h''(x) = \left(e^x - \frac{1}{x}\right)' = e^x + \frac{1}{x^2} > 0, \forall x \in (0, +\infty).$$

Άρα, η h' είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(0, +\infty)$ και επομένως το σύνολο τιμών της είναι:

$$h'((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} h'(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h'(x)\right) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^x - \frac{1}{x}\right), \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x - \frac{1}{x}\right)\right) = (-\infty, +\infty)$$

Έτσι, υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, +\infty)$ με $h'(x_0) = 0$, δηλαδή $e^{x_0} - \frac{1}{x_0} = 0$ και επομένως $x_0 = \frac{1}{e^{x_0}}$.

Επειδή η h' είναι γνησίως αύξουσα, θα έχουμε $h'(x) < 0$ για $x \in (0, x_0)$ και $h'(x) > 0$ για $x \in (x_0, +\infty)$, με συνέπεια το $h(x_0)$ να είναι ολικό **ελάχιστο** της h .

$$\text{Αφού } h(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 = e^{x_0} - \ln \frac{1}{e^{x_0}} = e^{x_0} - \ln e^{-x_0} = e^{x_0} + x_0 \ln e = e^{x_0} + x_0 > 0,$$

επομένως $h(x) \geq h(x_0) > 0, \forall x \in (0, +\infty)$ και συνεπώς θα ισχύει $e^x > \ln x, \forall x \in (0, +\infty)$.

7. Έστω συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του.

Αν η f είναι κυρτή στο Δ , να αποδείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει: $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$

Απόδειξη: Επειδή η f είναι κυρτή στο Δ , επομένως η f' θα είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του.

➤ Αν $x_1 = x_2$, τότε $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{2x_1}{2}\right) \leq \frac{2f(x_1)}{2} \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_1)$ και ισχύει.

➤ Αν $x_1 \neq x_2$, τότε για $x_1 < x_2$ (και ομοίως για $x_1 > x_2$) και για $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ θα έχουμε $2x_0 = x_1 + x_2$,

δηλαδή $x_0 - x_1 = x_2 - x_0 > 0$ και έτσι για τη σχέση που πρέπει να αποδείξουμε θα ισχύει:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \Leftrightarrow f(x_0) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \Leftrightarrow 2f(x_0) \leq f(x_1) + f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x_0) - f(x_1) \leq f(x_2) - f(x_0) \Leftrightarrow \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

Επειδή για την f ισχύουν προφανώς οι υποθέσεις του **Θεωρήματος Μέσης Τιμής** στα διαστήματα $[x_1, x_0]$ και $[x_0, x_2]$, επομένως θα υπάρχουν ξ_1, ξ_2 με $x_1 < \xi_1 < x_0 < \xi_2 < x_2$ για τα οποία θα έχουμε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}.$$

Όμως, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ και επομένως $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$.

Έτσι, θα έχουμε $\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$ και συνεπώς $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.

Συμπλήρωμα: Επειδή $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} \Leftrightarrow 2x_1 < x_1 + x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$ και

$$\frac{x_1 + x_2}{2} < x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 < 2x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2, \text{ επομένως για } x_1 < x_2,$$

θα έχουμε $x_1 < x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$ και συνεπώς $x_0 - x_1 = x_2 - x_0 > 0$.

Σχόλιο: Η «χορδή» AB με $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ έχει το μέσο της

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}\right), \text{ πάνω από το } N\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right)$$

κάτι που είναι φυσιολογικό στις «κυρτές» συναρτήσεις. (για $x_1 \neq x_2$)

