

ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

1. Είναι γνωστό, ότι το εμβαδόν ενός κύκλου μπορεί να μεταβληθεί, αν μεταβληθεί η ακτίνα του.

Να βρεθεί ο **ρυθμός μεταβολής** του εμβαδού ενός κύκλου, ως προς την ακτίνα του, όταν αυτή είναι 5m.

Λύση: Αν η ακτίνα του κύκλου είναι R , τότε το εμβαδόν του είναι $E = \pi \cdot R^2$.

Έτσι το εμβαδόν του κύκλου, σα **συνάρτηση** της ακτίνας του, είναι $E(R) = \pi \cdot R^2$.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτησή μας είναι παραγωγίσιμη, με $E'(R) = (\pi \cdot R^2)' = 2 \cdot \pi \cdot R$

και επομένως ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού, όταν $R = 5(\text{m})$, είναι $E'(5) = 2 \cdot \pi \cdot 5 = 10 \cdot \pi \left(\frac{\text{m}^2}{\text{m}} \right)$.

Σχόλια: (1) Η μονάδα μέτρησης του ρυθμού μεταβολής, είναι «ο λόγος» της μονάδας μέτρησης της εξαρτημένης μεταβλητής, προς τη μονάδα μέτρησης της ανεξάρτητης μεταβλητής.

Η απλοποίηση $\frac{\text{m}^2}{\text{m}} = \text{m}$ είναι απαράδεκτη, αφού αλλοιώνει τη «φύση» του αποτελέσματος.

(2) Ο ρυθμός μεταβολής, έχει αξία «στιγμιαίας πρόβλεψης». Έτσι βρίσκοντας ότι $E'(5) = 10 \cdot \pi \left(\frac{\text{m}^2}{\text{m}} \right)$,

«προβλέπουμε» ότι η μεταβολή του εμβαδού θα είναι «περίπου» $10\pi(\text{m}^2)$, σαν αποτέλεσμα μεταβολής της ακτίνας κατά 1m, δηλαδή από τα 5m, στα 6m. Πράγματι, $E(6) - E(5) = 36\pi - 25\pi = 11\pi(\text{m}^2)$.

(3) Παρόλο ότι, μας φαίνεται φυσιολογικό να χρησιμοποιείται ο όρος «**ρυθμός μεταβολής**», μόνο στην περίπτωση που η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος, θα χρησιμοποιείται σε κάθε περίπτωση, όπως και ο πετυχημένος όρος «**στιγμιαίος**» σε αντιπαράθεση με τον «**μέσο**».

(4) Επειδή, η συνάρτηση $f(x) = \pi \cdot x^2$ είναι παραγωγίσιμη (εννοείται στο $\mathbb{R}$), επομένως είναι παραγωγίσιμη σε κάθε διάστημα του $\mathbb{R}$. Έτσι, γράφοντας ότι η $E(R) = \pi \cdot R^2$ είναι παραγωγίσιμη, είμαστε σωστοί σε κάθε περίπτωση. Αν θεωρήσουμε ότι το σημείο είναι «εκφυλισμένος» κύκλος με $R = 0$, τότε $D_E = D_{E'} = [0, +\infty)$, ενώ αν δεν έχουμε τέτοια αντίληψη για τον κύκλο, τότε $D_E = D_{E'} = (0, +\infty)$.

2. Μια σφαιρική μπάλα χιονιού αρχίζει να λιώνει.

Η ακτίνα της που ελαττώνεται, δίνεται σε (cm) από τον τύπο $r = 4 - t^2$, όπου t ο χρόνος σε (sec).

Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας E και του όγκου V της μπάλας, όταν $t = 1$ (sec).

Λύση: Είναι γνωστό ότι για την επιφάνεια της σφαίρας ισχύει ο τύπος $E = 4\pi \cdot r^2$ και για τον όγκο $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$.

Επειδή $r = r(t)$ με $r(t) = 4 - t^2$, θα έχουμε τις συναρτήσεις $E(t) = 4\pi \cdot r^2(t)$ και $V(t) = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3(t)$.

Η συνάρτηση E είναι σύνθεση πολυωνυμικών συναρτήσεων και επομένως είναι παραγωγίσιμη. (ομοίως η V)

Έτσι, $E'(t) = (4\pi \cdot r^2(t))' = 8\pi \cdot r(t) \cdot r'(t)$ και $V'(t) = \left(\frac{4}{3}\pi \cdot r^3(t) \right)' = 4\pi \cdot r^2(t) \cdot r'(t)$.

Επίσης $r'(t) = (4 - t^2)' = -2t$ και επειδή $r(1) = 4 - 1^2 = 3(\text{cm})$, $r'(1) = -2 \cdot 1 = -2 \left(\frac{\text{cm}}{\text{sec}} \right)$,

ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειας E και του όγκου V της μπάλας, όταν $t = 1$ (sec), θα είναι :

$E'(1) = 8\pi \cdot r(1) \cdot r'(1) = 8\pi \cdot 3 \cdot (-2) = -48\pi \left(\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}} \right)$ και $V'(1) = 4\pi \cdot r^2(1) \cdot r'(1) = 4\pi \cdot 3^2 \cdot (-2) = -72\pi \left(\frac{\text{cm}^3}{\text{sec}} \right)$.

Σχόλια: (1) Θα μπορούσαμε, με αντικατάσταση, να είχαμε για E (και ομοίως για V),

$E(t) = 4\pi \cdot r^2(t) = 4\pi \cdot (4 - t^2)^2 = 4\pi \cdot (t^4 - 8t^2 + 16)$ και $E'(t) = 4\pi \cdot (4t^3 - 16t)$, με $E'(1) = -48\pi$.

(2) Προφανώς $t \geq 0$ και επειδή $r(t) = 0 \Leftrightarrow 4 - t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 2$, θα έχουμε $D_E = D_V = [0, 2]$.

(3) Θεωρήσαμε, ότι η μπάλα του χιονιού είναι η «τέλεια» σφαίρα.

Στη συνέχεια, θα λειτουργούμε αφαιρετικά όλο και πιο πολύ, προκειμένου να μάθουμε να χρησιμοποιούμε τα ανώτερα Μαθηματικά στην «καθημερινότητα».

(4) Για να αποφύγουμε τις πράξεις με τις μονάδες μέτρησης, τις βάζουμε σε παρένθεση στο τέλος.

(5) Οι πληροφορίες, ότι η χιονόμπαλα «λιώνει» και ότι ακτίνα της «ελαττώνεται», δεν ήταν απαραίτητες για τη λύση του προβλήματος, αφού γνωρίζαμε τη συναρτησιακή σχέση ακτίνας – χρόνου.

3. Μια σφαιρική μπάλα χιονιού αρχίζει να λιώνει.

Αν τη χρονική στιγμή $t_0 = 1$ (sec), η ακτίνα της μπάλας ήταν 3 cm και ελαττώνονταν με ρυθμό $2 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας E και του όγκου V της χιονόμπαλας, τη χρονική στιγμή t_0 .

Λύση: Η ακτίνα της σφαίρας είναι συνάρτηση του χρόνου, $r = r(t)$ και $r(1) = 3(\text{cm})$, $r'(1) = -2 \left(\frac{\text{cm}}{\text{sec}} \right)$.

Επειδή για την επιφάνεια της σφαίρας ισχύει ο τύπος $E = 4\pi \cdot r^2$ και για τον όγκο $V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$,

θα έχουμε τις συναρτήσεις $E(t) = 4\pi \cdot r^2(t)$ και $V(t) = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3(t)$.

Η συνάρτηση E είναι παραγωγίσιμη στο $t_0 = 1$, επειδή είναι σύνθεση πολωνυμικής συνάρτησης, και επομένως παραγωγίσιμης, με τη συνάρτηση $r = r(t)$, που είναι παραγωγίσιμη στο $t_0 = 1$. (ομοίως η V)

Έτσι, $E'(t) = (4\pi \cdot r^2(t))' = 8\pi \cdot r(t) \cdot r'(t)$ και $V'(t) = \left(\frac{4}{3} \pi \cdot r^3(t) \right)' = 4\pi \cdot r^2(t) \cdot r'(t)$, και για $t_0 = 1$

$E'(1) = 8\pi \cdot r(1) \cdot r'(1) = 8\pi \cdot 3 \cdot (-2) = -48\pi \left(\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}} \right)$ και $V'(1) = 4\pi \cdot r^2(1) \cdot r'(1) = 4\pi \cdot 3^2 \cdot (-2) = -72\pi \left(\frac{\text{cm}^3}{\text{sec}} \right)$.

Σχόλιο: Για την πληροφορία $r'(1) = -2 (\text{cm/sec})$, η λέξη «ελαττώνονταν», «δήλωσε» το πρόσημο $(-)$.

4. Σε ένα εργοστάσιο που παράγει πλυντήρια, η εβδομαδιαία παραγωγή δεν μπορεί να ξεπεράσει τα 400 κομμάτια και το **συνολικό** κόστος σε ευρώ (€), παραγωγής x πλυντηρίων, είναι $K(x) = 2000 + 100x - \frac{x^2}{10}$.

Να βρείτε: (α) Το μέσο κόστος παραγωγής, όταν παράγονται **μόνο** 100 πλυντήρια.

(β) Την οριακή τιμή κόστους παραγωγής 100 πλυντηρίων.

(γ) Το **επιπλέον** κόστος, παραγωγής του 101^{ου} πλυντηρίου, όταν τα πρώτα 100 έχουν ήδη παραχθεί.

Λύση: Εννοείται φυσικά, ότι $0 \leq x \leq 400$ και υποτίθεται ότι η x είναι **συνεχής μεταβλητή**,

δηλαδή υποτίθεται ότι η x **δύναται να πάρει όλες τις τιμές** στα διαστήματα που ορίζεται,

δηλαδή υποτίθεται ότι **το προϊόν είναι τέλεια διαιρετό**.

Με τις παραπάνω προϋποθέσεις, η συνάρτηση **συνολικού** κόστους είναι παραγωγίσιμη, σαν πολωνυμική,

$$\text{και } K'(x) = \left(2000 + 100x - \frac{x^2}{10} \right)' = 100 - \frac{x}{5}.$$

(α) Το μέσο κόστος παραγωγής x πλυντηρίων, είναι $K_\mu(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{2000}{x} + 100 - \frac{x}{10}$, με $x > 0$

και επομένως το μέσο κόστος παραγωγής 100 πλυντηρίων, είναι $K_\mu(100) = \frac{2000}{100} + 100 - \frac{100}{10} = 110 \left(\frac{\text{€}}{\text{πλ.}} \right)$.

(β) Η οριακή τιμή κόστους παραγωγής 100 πλυντηρίων είναι $K'(100) = 100 - \frac{100}{5} = 80 (\text{€/πλυντήριο})$.

(γ) Το **επιπλέον** κόστος παραγωγής του 101^{ου} πλυντηρίου, όταν τα πρώτα 100 έχουν ήδη παραχθεί, είναι:

$$K(101) - K(100) = \cancel{2000} + 100 \cdot 101 - \frac{101^2}{10} - \cancel{2000} - 100 \cdot 100 + \frac{100^2}{10} = 100 + 1000 - 1020,1 = 79,9 (\text{€}).$$

Σχόλιο: (1) Η οριακή τιμή κόστους 100 πλυντηρίων είναι περίπου ίση με το **επιπλέον** κόστος του 101^{ου} πλυν.

- (2) Στα προβλήματα ρυθμού μεταβολής μιας συνάρτησης, το σημαντικό είναι να αντιλαμβανόμαστε τι ακριβώς μας ζητάνε και να «αποκρυπτογραφούμε» τις πληροφορίες που μας δίνονται.
- (3) Δε θα πρέπει να «παίρνουμε στα σοβαρά» τους τύπους αυτών των συναρτήσεων, αφού για να μη «βαρύνει» ιδιαίτερα το πρόβλημα, είναι αρκετά μακριά από το να περιγράφουν, στη γλώσσα των Μαθηματικών, την πραγματικότητα.

5. Ένα περιπολικό Α κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = -\frac{1}{3}x^3$, $x \leq 0$

πλησιάζοντας την ακτή, και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός.

Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο $a'(t) = -a(t)$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ της ακτής, στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα, τη χρονική στιγμή κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη -3 .

Λύση: Η καμπύλη με εξίσωση $y = -\frac{1}{3}x^3$, $x \leq 0$, είναι η γραφική παράσταση C_f ,

της συνάρτησης $f(x) = -\frac{1}{3}x^3$, με $D_f = (-\infty, 0]$.

Η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f'(x) = \left(-\frac{1}{3}x^3\right)' = -x^2$.

Η εφαπτομένη της C_f στο Α έχει εξίσωση $y - \left(-\frac{a^3}{3}\right) = f'(a)(x - a)$, δηλαδή $y + \frac{a^3}{3} = -a^2(x - a)$.

Έτσι, για $a < 0$, το σημείο Μ έχει τετμημένη, την τετμημένη του κοινού σημείου των ευθειών, με εξισώσεις $y = 0$ και $y = -a^2x + \frac{2a^3}{3}$, δηλαδή το Χ, στη λύση του συστήματος $\left\{ y = 0 \text{ και } y = -a^2x + \frac{2a^3}{3} \right\}$.

$$\text{Όμως, } 0 = -a^2x + \frac{2a^3}{3} \Leftrightarrow a^2x = \frac{2a^3}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2a}{3}$$

και συνεπώς η τετμημένη Χ του σημείου Μ είναι συνάρτηση της τετμημένης Α του σημείου Α.

Αφού $a = a(t)$, θα έχουμε $x(t) = \frac{2}{3} \cdot a(t)$ και επειδή $a'(t) = -a(t)$,

η συνάρτηση $x(t) = \frac{2}{3} \cdot a(t)$ θα είναι παραγωγίσιμη με $x'(t) = \left(\frac{2}{3} \cdot a(t)\right)' = \frac{2}{3} \cdot a'(t)$.

Τη χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία $a(t_0) = -3$, θα έχουμε $a'(t_0) = -a(t_0) = -(-3) = 3$

$$\text{και συνεπώς } x'(t_0) = \frac{2}{3} \cdot a'(t_0) = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2 \left(\frac{\text{μονάδες μήκους}}{\text{μονάδα χρόνου}} \right).$$

Συμπλήρωμα: $y + \frac{a^3}{3} = -a^2(x - a) \Leftrightarrow y = -a^2x + a^3 - \frac{a^3}{3} \Leftrightarrow y = -a^2x + \frac{2a^3}{3}$

Σχόλιο: Αρχικά λύσαμε το πρόβλημα «στατικά», δηλαδή χωρίς κίνηση. Εκφράσαμε στη «γλώσσα των Μαθηματικών», τη σχέση των τετμημένων Χ και Α, των σημείων Μ και Α αντίστοιχα.

Η σχέση $x = \frac{2a}{3}$ είναι μια συναρτησιακή σχέση ανάμεσα στις μεταβλητές Χ και Α.

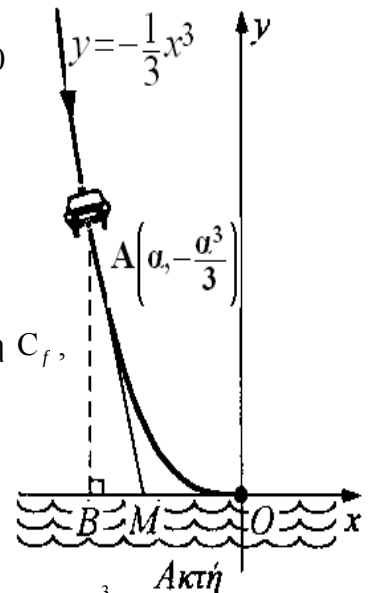
Προφανώς, η εξαρτημένη θέση της μεταβλητής Χ, ταιριάζει στην «φύση» του προβλήματος.

(Στην άσκηση 3, το «στατικό» πρόβλημα ήταν λυμένο, αφού γνωρίζαμε π.χ. ότι $E = 4\pi \cdot r^2$.)

Με λυμένο το «στατικό» πρόβλημα, προχωρήσαμε στη λύση του «δυναμικού» προβλήματος, δηλαδή του προβλήματος με κίνηση.

Είναι απολύτως φυσιολογικό, η εξάρτηση της μεταβλητής Α, από το χρόνο t, να «μεταβιβάζεται» στην

εξαρτημένη από το Α, μεταβλητή Χ. Έτσι η σχέση $x = \frac{2a}{3}$, έγινε $x(t) = \frac{2}{3} \cdot a(t)$.



6. Ένα κινητό κινείται σε κυκλική τροχιά με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$.

Καθώς περνάει από το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, η τεταγμένη y ελαττώνεται με ρυθμό 3 μονάδες το δευτερόλεπτο.

Να βρείτε το **ρυθμό μεταβολής** της τετμημένης x τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το A .

Λύση: Η σχέση $x^2 + y^2 = 1$, γίνεται $x^2(t) + y^2(t) = 1$ και τη χρονική στιγμή t_0 , που το κινητό περνάει

από το A , θα έχουμε $x(t_0) = \frac{1}{2}$ (μονάδες), $y(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (μονάδες) και $y'(t_0) = -3 \left(\frac{\text{μονάδες}}{\text{sec}}\right)$.

Επειδή μας λένε να βρούμε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει

από το A , άρα υπάρχει η $x'(t_0)$, γενικότερα ισχύει $(x^2(t))' + (y^2(t))' = (1)'$,

δηλαδή $2 \cdot x(t) \cdot x'(t) + 2 \cdot y(t) \cdot y'(t) = 0$ και για $t = t_0$ θα έχουμε $x(t_0) \cdot x'(t_0) + y(t_0) \cdot y'(t_0) = 0$.

Έτσι, $\frac{1}{2} \cdot x'(t_0) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-3) = 0$ και συνεπώς $x'(t_0) = 3 \cdot \sqrt{3} \left(\frac{\text{μονάδες}}{\text{sec}}\right)$.

7. Μια σκάλα μήκους **3m** είναι τοποθετημένη σ' έναν τοίχο.

Το κάτω μέρος της σκάλας γλιστράει στο δάπεδο με ρυθμό **0,1m/sec**. Τη χρονική στιγμή t_0 , που η κορυφή της σκάλας απέχει από το δάπεδο **2,5m**, να βρείτε:

(i) Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ .

(ii) Την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή A της σκάλας.

Λύση: Προφανώς $x^2 + y^2 = 3^2$ και $\text{συν}\theta = \frac{x}{3}$, δηλαδή $x = 3 \cdot \text{συν}\theta$.

Επειδή $x = x(t)$, επομένως $x^2(t) + y^2(t) = 9$ και $x(t) = 3 \cdot \text{συν}\theta(t)$.

Γνωρίζουμε, ότι η ταχύτητα με την οποία γλιστράει το B είναι $v_B = x'(t) = 0,1 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

(i) Επειδή μας λένε να βρούμε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ τη χρονική στιγμή t_0 , άρα η συνάρτηση

$\theta(t)$ είναι παραγωγίσιμη στο t_0 , γενικότερα θα έχουμε $x(t) = 3 \cdot \text{συν}\theta(t) \Rightarrow x'(t) = (3 \cdot \text{συν}\theta(t))' \Rightarrow$
 $\Rightarrow x'(t) = -3 \cdot \eta\mu\theta(t) \cdot \theta'(t)$ και συνεπώς για $t = t_0$ θα έχουμε $x'(t_0) = -3 \cdot \eta\mu\theta(t_0) \cdot \theta'(t_0)$.

Αφού $\eta\mu\theta(t_0) = \frac{y(t_0)}{3} = \frac{2,5}{3}$, άρα $0,1 = -3 \cdot \frac{2,5}{3} \cdot \theta'(t_0)$ και επομένως $\theta'(t_0) = -0,04 \left(\frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right)$.

(ii) Η ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή A της σκάλας είναι $v_A = y'(t)$ και αφού υπάρχει η $y'(t_0)$,

γενικότερα θα έχουμε $x^2(t) + y^2(t) = 9 \Rightarrow (x^2(t))' + (y^2(t))' = (9)' \Rightarrow 2x(t) \cdot x'(t) + 2y(t) \cdot y'(t) = 0$

και επομένως $x(t_0) \cdot x'(t_0) + y(t_0) \cdot y'(t_0) = 0$.

Επειδή $x(t_0) = \sqrt{9 - y^2(t_0)} = \sqrt{9 - 2,5^2} = \sqrt{9 - 6,25} = \sqrt{2,75}$, θα έχουμε $\sqrt{2,75} \cdot 0,1 + 2,5 \cdot y'(t_0) = 0$

και συνεπώς $y'(t_0) = -\frac{\sqrt{2,75}}{25} \left(\frac{\text{m}}{\text{sec}}\right)$.

Σχόλια: (1) Δεν είναι πάντα εύκολο, να υποστηρίξουμε ότι μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη, σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Στην άσκηση 6, ήταν δυνατό με τις γνώσεις που έχουμε, να υποστηρίξουμε

ότι υπάρχει η $x'(t_0)$, ενώ στην άσκηση 7, δεν επαρκούσαν οι γνώσεις μας, για να υποστηρίξουμε **άμεσα**,

ότι η συνάρτηση $\theta(t)$ είναι παραγωγίσιμη στο t_0 .

(2) Θα πρέπει να παρατηρήσουμε, ότι η ακριβής γνώση του πεδίου ορισμού, δεν ήταν πάντα αναγκαία.

(3) Θα πρέπει να επισημάνουμε, ότι όταν είχαμε ίσες συναρτήσεις και θέλαμε να βρούμε την παράγωγο σε ένα συγκεκριμένο σημείο του πεδίου ορισμού τους, **εφαρμόσαμε τους κανόνες παραγωγίσης στην ισότητα των «τύπων»** και όχι στην ισότητα των τιμών. Στην τελική μορφή του τύπου, λέγαμε π.χ. «και για $t = t_0 \dots\dots$ ».