

«ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ» (β)

Άσκηση Α2: Ο όγκος V ενός σφαιρικού μπαλονιού που φουσκώνει, αυξάνεται με ρυθμό $100 \frac{\text{cm}^3}{\text{sec}}$.

Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η ακτίνα του r τη χρονική στιγμή t_0 , όπου αυτή είναι ίση με 9cm ;

Λύση: Ο όγκος V , της σφαίρας με ακτίνα r , σαν συνάρτηση του r , δίνεται από τον τύπο: $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$.

Από το «... με ρυθμό», του όγκου της σφαίρας, και από το ερώτημα για την ακτίνα της, προκύπτει ότι και τα δύο θα πρέπει να εκφραστούν σαν συναρτήσεις του χρόνου t . Έτσι, $V(t) = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3(t)$, και επειδή

«ονομάσαμε ρυθμό μεταβολής, την παράγωγο της συνάρτησης», $V'(t) = 4\pi \cdot r^2(t) \cdot r'(t)$.

$$* \quad V'(t) = \left(\frac{4}{3}\pi \cdot r^3(t) \right)' = \frac{4}{3}\pi \cdot 3 \cdot r^2(t) \cdot r'(t) = 4\pi \cdot r^2(t) \cdot r'(t).$$

Επίσης, προκύπτουν και οι μονάδες μέτρησης: $t(\text{sec})$, $r(\text{cm})$, $V(\text{cm}^3)$ και $r'\left(\frac{\text{cm}}{\text{sec}}\right)$, $V'\left(\frac{\text{cm}^3}{\text{sec}}\right)$.

Με δεδομένα $r(t_0) = 9(\text{cm})$ και $V'(t_0) = 100\left(\frac{\text{cm}^3}{\text{sec}}\right)$, έχουμε από τη σχέση $V'(t_0) = 4\pi \cdot r^2(t_0) \cdot r'(t_0)$,

$$\text{ότι } 100 = 4\pi \cdot 9^2 \cdot r'(t_0), \text{ επομένως } r'(t_0) = \frac{100}{4\pi \cdot 81} \text{ και συνεπώς } r'(t_0) = \frac{25}{81\pi}\left(\frac{\text{cm}}{\text{sec}}\right).$$

Σχόλια: (1) Για να μη χρειαστεί να κάνουμε πράξεις με τις μονάδες μέτρησης, εργαζόμαστε με τις αλγεβρικές τιμές των μεγεθών, και βάζουμε τη μονάδα μέτρησης στα αποτελέσματα, σε παρένθεση «επεξηγηματικά». Αυτό το κάνουμε με συνέπεια σε όλο το κείμενο, για να αποφύγουμε τα λάθη.

(2) Στην έκφραση «αυξάνεται με ρυθμό», εμείς αρχικά «διαβάσαμε» το ασθενέστερο «μεταβάλλεται με ρυθμό», για να οδηγηθούμε συνειρμικά στην παράγωγο. Στη συνέχεια, όταν χρειάστηκε να γράψουμε το δεδομένο του «ρυθμού μεταβολής», του όγκου της σφαίρας, ξαναδιαβάσαμε το ακριβές «αυξάνεται με

ρυθμό», για να μην κάνουμε λάθος στο πρόσημο $V'(t) = +100$, και συνεπώς $V'(t_0) = +100 = 100\left(\frac{\text{cm}^3}{\text{sec}}\right)$.

Άσκηση Β1: Αν η επιφάνεια μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό $10 \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}$, να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται ο όγκος αυτής, όταν $r = 85\text{cm}$.

Λύση: Προφανώς, αν E είναι η επιφάνεια της σφαίρας και V ο όγκος της, $E'(t) = +10 = 10\left(\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}\right)$, και

κάποια χρονική στιγμή t_0 , για την ακτίνα r της σφαίρας, ισχύει $r(t_0) = 85(\text{cm})$, και $E'(t_0) = 10\left(\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}\right)$.

$$E = 4\pi \cdot r^2 \Rightarrow E(t) = 4\pi \cdot r^2(t) \Rightarrow E'(t) = 8\pi \cdot r(t) \cdot r'(t) \Rightarrow E'(t_0) = 8\pi \cdot r(t_0) \cdot r'(t_0) \quad (1)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \Rightarrow V(t) = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3(t) \Rightarrow V'(t) = 4\pi \cdot r^2(t) \cdot r'(t) \Rightarrow V'(t_0) = 4\pi \cdot r^2(t_0) \cdot r'(t_0) = 8\pi \cdot r(t_0) \cdot r'(t_0) \cdot \frac{r(t_0)}{2}$$

$$\text{Έτσι, από τη σχέση (1) προκύπτει: } V'(t_0) = E'(t_0) \cdot \frac{r(t_0)}{2} = 10 \cdot \frac{85}{2} = 425\left(\frac{\text{cm}^3}{\text{sec}}\right)$$

Σχόλιο: Προτιμήσαμε την αντικατάσταση του «πακέτου», αντί να λύσουμε την (1) ως προς $r'(t_0)$.

Γενικά σχόλια: (1) Όταν η **μεταβολή του ρυθμού** δίνεται με τύπο συνάρτησης, ή προκύπτει από την παραγωγή τύπου συνάρτησης (άσκηση A1), τα ρήματα αυξάνει για το (+) και μειώνεται για το (-), είναι πλεονασμός, και έχουν αξία μόνο για την επιβεβαίωση της ορθότητας των αποτελεσμάτων. Με την ίδια λογική, στην περίπτωση μας, στην άσκηση A2, το «αυξάνεται η ακτίνα r » είναι πλεονασμός, αφού η αύξηση του όγκου, συνεπάγεται την αύξηση της ακτίνας, και με τη χρήση αληθούς σχέσης, η οποία «τροφοδοτείται» με σωστά «προσημασμένα» δεδομένα, είναι εξασφαλισμένη η ορθότητα των συμπερασμάτων. Ομοίως στην άσκηση B1, όπου η αύξηση της επιφάνειας συνεπάγεται την αύξηση του όγκου. Όμως, καλό είναι για λόγους «ασφαλείας», πάντα να προσέχουμε τα προαναφερθέντα ρήματα.

(2) Η μονάδα μέτρησης, με τη μορφή πηλίκου μονάδων μέτρησης, παραπέμπει σε «ρυθμό μεταβολής», δηλαδή παράγωγο συνάρτησης, όπου στη γενική μορφή $f(x)=y$, η μονάδα μέτρησης στον παρονομαστή, αφορά την ανεξάρτητη μεταβλητή x και η μονάδα μέτρησης στον αριθμητή, την εξαρτημένη μεταβλητή y . Ομοίως σκεπτόμαστε και αντίστροφα, όπου όταν υπολογίζουμε «ρυθμό μεταβολής», θεωρούμε αυτονόητο ότι η μονάδα μέτρησης του αποτελέσματος θα έχει μορφή πηλίκου.

Άσκηση A3: Το (συνολικό) κόστος παραγωγής, $K(x)$, και η τιμή πώλησης, $\Pi(x)$, x μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος, δίνονται από τις συναρτήσεις $K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 20x^2 + 600x + 1000$ και $\Pi(x) = 420x$, αντιστοίχως.

Να βρείτε πότε ο «ρυθμός μεταβολής» του κέρδους $P(x) = \Pi(x) - K(x)$, είναι θετικός.

Λύση: $\Pi(x) = 420x \Rightarrow \Pi'(x) = 420$ και $K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 20x^2 + 600x + 1000 \Rightarrow K'(x) = x^2 - 40x + 600$

Έτσι, $P(x) = \Pi(x) - K(x) \Rightarrow P'(x) = \Pi'(x) - K'(x) \Rightarrow P'(x) = 420 - (x^2 - 40x + 600) = -x^2 + 40x - 180$

και επομένως $P'(x) > 0 \Leftrightarrow -x^2 + 40x - 180 > 0 \Leftrightarrow 20 - \sqrt{220} < x < 20 + \sqrt{220}$

* $\Delta = 40^2 - 4(-1) \cdot (-180) = 880$ και ρίζες οι αριθμοί $\frac{-40 \pm \sqrt{880}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \cdot (20 \mp \sqrt{220})}{-2} = 20 \pm \sqrt{220}$.

Επομένως, το τριώνυμο γίνεται **θετικό**, δηλαδή **ετερόσημο** του (-1) , που είναι ο συντελεστής του x^2 , όταν το x πάρει τιμές ανάμεσα στις ρίζες του τριωνύμου.

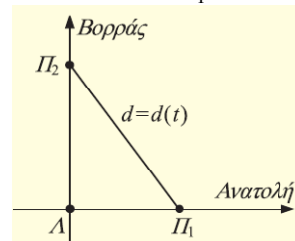
Σχόλιο: Όπως είπαμε και στο πρώτο κείμενο, υποτίθεται ότι η x είναι συνεχής μεταβλητή, δηλαδή θεωρούμε ότι η x δύναται να πάρει όλες τις τιμές στα διαστήματα που ορίζεται, δηλαδή υποτίθεται ότι το προϊόν είναι τέλεια διαιρετό. Με την παραπάνω προϋπόθεση, οι συναρτήσεις μας είναι συνεχείς σαν πολυωνυμικές, και παραγωγίσιμες σαν «αθροίσματα» παραγωγίσιμων συναρτήσεων, που με τη σειρά τους είναι παραγωγίσιμες λόγω της ισχύος των γνωστών «κανόνων παραγωγίσης».

$$\begin{aligned} \pi.χ.: \left(\frac{1}{3}x^3 - 20x^2 + 600x + 1000 \right)' &= \left(\frac{1}{3}x^3 \right)' + (-20x^2)' + (600x)' + (1000)' = \\ &= \frac{1}{3} \cdot (x^3)' + (-20)(x^2)' + 600(x)' + 0 = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + (-20) \cdot 2x^1 + 600 \cdot 1 = x^2 - 40x + 600 \end{aligned}$$

Για να χρησιμοποιήσουμε τα Μαθηματικά «εργαλεία», υποθέσαμε ότι το προϊόν είναι τέλεια διαιρετό.

Η πραγματικότητα όμως είναι άλλη, και έτσι για το αποτέλεσμα, μπορούμε να πούμε ότι η μεταβλητή x δύναται να πάρει μόνο τιμές φυσικού αριθμού, και αφού $14 < \sqrt{220} < 15$ και $-15 < -\sqrt{220} < -14$, επομένως: $5 = 20 - 15 < 20 - \sqrt{220} < 20 - 14 = \boxed{6 \leq x \leq 34} = 20 + 14 < 20 + \sqrt{220} < 20 + 15 = 35$, με $x \in \mathbb{N}$.

Άσκηση Α4: Δύο πλοία Π_1 και Π_2 , αναχωρούν συγχρόνως από ένα λιμάνι Λ . Το πλοίο Π_1 κινείται ανατολικά, με ταχύτητα $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ και το Π_2 το βόρεια, με ταχύτητα $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.



- Να βρείτε τις συναρτήσεις θέσεως των Π_1 και Π_2 .
- Να αποδείξετε ότι η απόσταση $d = (\Pi_1 \Pi_2)$ των δύο πλοίων αυξάνεται με σταθερό ρυθμό, τον οποίο και να προσδιορίσετε.

Λύση: Επειδή οι άξονες **Δύση – Ανατολή**, **Νότος – Βορράς** είναι κάθετοι, μπορούμε να θεωρήσουμε, ότι το σχήμα μας δύναται να «προσαρμοστεί» σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, έτσι που το Λ να είναι η αρχή των αξόνων, το Π_1 να κινείται στον θετικό ημιάξονα των x , και το Π_2 στον θετικό ημιάξονα των y , με συναρτήσεις θέσεως $x(t)$ και $y(t)$, αντίστοιχα.

- Η κίνηση γίνεται στους **θετικούς** ημιάξονες, όπου οι «**τετμημένες**» ⁽²⁾ ταυτίζονται με τις αποστάσεις από την αρχή, **σταθερά με θετική φορά**, δηλαδή «από τα μικρότερα προς τα μεγαλύτερα».

Έτσι, $x'(t) = v_1 = 15 \left(\frac{\text{km}}{\text{h}} \right)$ και $y'(t) = v_2 = 20 \left(\frac{\text{km}}{\text{h}} \right)$, και επειδή η κίνηση

γίνεται σε ευθεία με **σταθερή ταχύτητα**, είναι «**ευθύγραμμη ομαλή κίνηση**», με $x(0) = 0 = y(0)$, αφού τα δύο πλοία αναχωρούν συγχρόνως από το λιμάνι, και επομένως ισχύουν οι σχέσεις $x(t) = v \cdot t$ και $y(t) = v \cdot t$, δηλαδή $x(t) = x'(t) \cdot t = 15t(\text{km})$ και $y(t) = y'(t) \cdot t = 20t(\text{km})$.

- Από την εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Lambda \Pi_1 \Pi_2$, προκύπτει ότι: $d^2(t) = x^2(t) + y^2(t)$, δηλαδή $d^2(t) = (15t)^2 + (20t)^2$, επομένως $d^2(t) = 625t^2$, και συνεπώς

$d(t) = \sqrt{625t^2} = 25t$, αφού $d(t) \geq 0$, σαν απόσταση, και $t \geq 0$. Έτσι, $d'(t) = (25t)' = 25 \left(\frac{\text{km}}{\text{h}} \right)$,

άρα $d'(t) = +25(\text{Km/h})$, δηλαδή η απόσταση $d = (\Pi_1 \Pi_2)$ των δύο πλοίων, αυξάνεται με σταθερό ρυθμό.

Σχόλια: (1) Όπως πάντα κάναμε αυτό που πρέπει. Αξιοποιήσαμε την υπόθεση χωρίς να την κρίνουμε, προκειμένου να τεκμηριώσουμε τα ζητούμενα συμπεράσματα. Τώρα που τελειώσαμε, αξίζει να επισημάνουμε, ότι στην υπόθεση, η μεταβολή της ταχύτητας, από τη μηδενική στο λιμάνι στις τελικά σταθερές 15 και 20, παρουσιάζεται σαν να «έγινε» ακαριαία!

(2) Στις σελίδες 91 και 92 του σχολικού βιβλίου, ασχοληθήκαμε με τη «συνάρτηση θέσης», $S = S(t)$, ενός σώματος που κινείται κατά μήκος ενός άξονα. Εκεί, υποθέσαμε ότι $S = S(t)$, είναι η τετμημένη του σώματος αυτού, τη χρονική στιγμή t . Έτσι, και στην παραπάνω άσκηση, χρησιμοποιήσαμε τη λέξη «τετμημένες» και για τους δύο άξονες, αφού πάνω στον καθένα αποτυπώνει σημεία η «δικιά του» συνάρτηση θέσης, που για να μην υπάρξει σύγχυση, εγκατέλειψε το όνομα S , και πήρε το συνηθισμένο όνομα του άξονα, δηλαδή «η $S = S(t)$ », του άξονα $x'x$, είναι η $x = x(t)$, και του άξονα $y'y$, η $y = y(t)$.

Είναι αυτονόητο, ότι για τις συντεταγμένες ενός σημείου, σε ένα επίπεδο «εφοδιασμένο» με **σύστημα αξόνων**, θα συνεχίσουμε να διακρίνουμε την τετμημένη, από την τεταγμένη.

(3) Όσοι προσπάθησαν να βρουν την παράγωγο της $d(t)$, παραγωγίζοντας τη σχέση που προκύπτει από το Πυθαγόρειο Θεώρημα, σίγουρα διαπίστωσαν, ότι «έκαναν τα εύκολα, δύσκολα».

(4) Στο ορθοκανονικό σύστημα που χρησιμοποιήσαμε, δεν θα μπορούσε να «φιλοξενηθεί», καμία από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, που χρησιμοποιήθηκαν.

(5) Αξίζει να ξαναδιαβάσουμε το σχόλιο στην προαναφερθείσα σελίδα 92, που ανοίγει το δρόμο, για να κατανοήσουμε τη λειτουργία των Μαθηματικών εργαλείων, στις επόμενες παραγράφους.

Άσκηση A5: Ένα κινητό M ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \frac{1}{4}x^2$, $x \geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης, ο «**ρυθμός μεταβολής**» της τεταγμένης x του M, είναι ίσος με το «**ρυθμό μεταβολής**» της τεταγμένης του, y , αν υποθεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

Λύση: Προφανώς, το σημείο M, σε κάθε θέση του πάνω στην καμπύλη, είναι $M(x, y)$, δηλαδή

$M\left(x, \frac{1}{4}x^2\right)$, και συναρτήσει του χρόνου t : $M\left(x(t), \frac{1}{4}x^2(t)\right)$. Εμείς «ζητάμε»: $x'(t) = \left(\frac{1}{4}x^2(t)\right)'$.

$x'(t) = \left(\frac{1}{4}x^2(t)\right)' \Leftrightarrow x'(t) = \frac{2}{4}x(t) \cdot x'(t) \stackrel{x'(t) \neq 0}{\Leftrightarrow} 1 = \frac{1}{2}x(t) \Leftrightarrow x(t) = 2$. Όμως, για $x(t) = 2$, θα έχουμε

$y(t) = \frac{1}{4}x^2(t) = \frac{1}{4} \cdot 2^2 = 1$, και συνεπώς το σημείο που ζητήσαμε είναι το $M(2, 1)$.

Σχόλιο: Όπως θα δούμε στη συνέχεια (§2.6), η υπόθεση: $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$, **εξασφαλίζει ότι** η $x(t)$ είναι **γνησίως αύξουσα συνάρτηση**, επομένως «1-1», και συνεπώς υπάρχει **μοναδικό** t_0 , με $x(t_0) = 2$ και $y(t_0) = 1$, **και ότι** η κίνηση του M πάνω στην καμπύλη, είναι σταθερά «**ανηφορική**».

Άσκηση B2: Έστω T το εμβαδόν του τριγώνου OAB, που ορίζουν τα σημεία $O(0, 0)$, $A(x, 0)$ και

$B(0, \ln x)$, με $x > 1$. Αν το x **αυξάνεται** με ρυθμό $4 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$,

να βρείτε το «**ρυθμό μεταβολής**» του εμβαδού T , όταν $x = 5 \text{ cm}$.

Λύση: $T = (OAB) = \frac{1}{2}x \cdot \ln x$, με $x > 1$, και επειδή $x = x(t)$, έχουμε:

$$T(t) = \frac{1}{2}x(t) \cdot \ln x(t), \text{ επομένως } T'(t) = \left(\frac{1}{2}x(t) \cdot \ln x(t)\right)' = \frac{1}{2} \left\{ x'(t) \cdot \ln x(t) + x(t) \cdot [\ln x(t)]' \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[x'(t) \cdot \ln x(t) + \cancel{x(t)} \cdot \frac{1}{\cancel{x(t)}} \cdot x'(t) \right] = \frac{1}{2} [x'(t) \cdot \ln x(t) + x'(t)] = \frac{1}{2} \cdot x'(t) \cdot (\ln x(t) + 1)$$

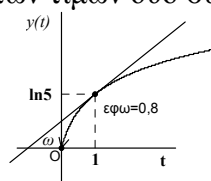
Προφανώς, υπάρχει t_0 , για το οποίο $x(t_0) = 5$, και επειδή **$x'(t) = +4 = 4$** , επομένως $x'(t_0) = 4$.

$$\text{Έτσι, } T'(t_0) = \frac{1}{2} \cdot x'(t_0) \cdot (\ln x(t_0) + 1) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (\ln 5 + 1) = 2 \cdot (\ln 5 + 1) \left(\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}} \right)$$

Σχόλια: (1) Η έκφραση «**ρυθμός μεταβολής**» είναι τυποποιημένη («κλισέ») και δηλώνει αλγεβρική τιμή.

Έτσι, στη διατύπωση: «το x μεταβάλλεται με «**ρυθμό μεταβολής**» $4 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$, και πάλι θα διαβάζαμε **$+4 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$**

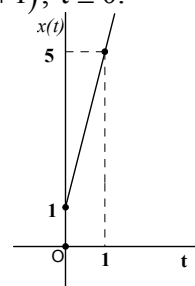
(2) Η γραφική παράσταση της $f(x) = \ln x$, για $x > 1$, «χρησιμοποιεί» σύστημα αξόνων, όπου οι άξονες του, είναι οι άξονες τεταγμένων δύο **συναρτήσεων θέσης**. Έτσι, μπορεί να παρουσιάζει, τη «**σύζευξη**» των τιμών δύο συναρτήσεων. π.χ.: θα μπορούσε να είναι $x(t) = 4t + 1$ και $y(t) = \ln(4t + 1)$, $t \geq 0$.



$$\text{Προφανώς } x'(t) = 4, \text{ και } y'(t) = \frac{4}{4t+1}. \quad \boxed{x(t) = 4t + 1 = 5 \Leftrightarrow t = 1}$$

$$\text{Άρα } t_0 = 1, \text{ και } x(1) = 5, y(1) = \ln 5, x'(1) = 4, y'(1) = \frac{4}{5}.$$

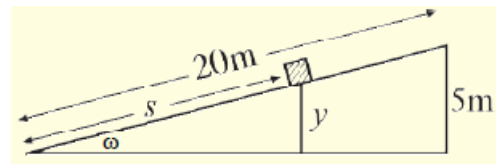
$$\text{Έτσι, } T'(1) = \frac{1}{2} [x'(1) \cdot y(1) + x(1) \cdot y'(1)] = \frac{1}{2} \left(4 \cdot \ln 5 + 5 \cdot \frac{4}{5} \right) = 2(\ln 5 + 1)$$



Άσκηση B3: Ένας άνθρωπος **σπρώχνει** ένα κουτί στη ράμπα

του διπλανού σχήματος, και το κουτί κινείται με ταχύτητα $3 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

Να βρείτε πόσο γρήγορα **ανυψώνεται** το κουτί, δηλαδή το «**ρυθμό μεταβολής**» του y .



Λύση: Στο μεγάλο ορθογώνιο τρίγωνο $\eta\mu\omega = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$, και επειδή στο μικρό ορθογώνιο τρίγωνο

$$y = s \cdot \eta\mu\omega, \text{ επομένως } y = \frac{s}{4}, \text{ και συναρτήσει του χρόνου } t, \text{ έχουμε: } y(t) = \frac{s(t)}{4} \text{ και } y'(t) = \frac{s'(t)}{4}.$$

Η ταχύτητα κίνησης του κουτιού είναι $v = +3$, και επειδή $v = s'(t)$, επομένως $y'(t) = \frac{s'(t)}{4} = \frac{3}{4} \left(\frac{\text{m}}{\text{sec}} \right)$.

Σχόλιο: (1) Προφανώς η κίνηση είναι ευθύγραμμη με σταθερή ταχύτητα, και επομένως είναι «**ευθύγραμμη ομαλή κίνηση**». Έτσι, $s(t) = v \cdot t = 3t(\text{m})$, και επειδή $y(t) = \frac{s(t)}{4}$, επομένως

$$y(t) = \frac{3}{4}t(\text{m}), \text{ και συνεπώς } y'(t) = \left(\frac{3}{4}t \right)' = \frac{3}{4} \left(\frac{\text{m}}{\text{sec}} \right).$$

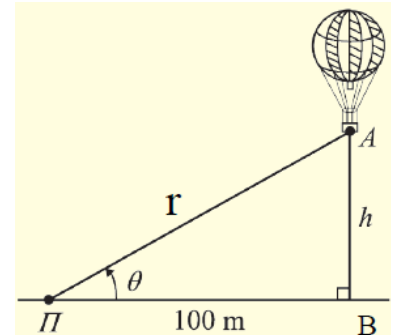
(2) Προφανώς η λέξη «**σπρώχνει**», δεν εξασφαλίζει τη φορά κίνησης, όμως η λέξη «**ανυψώνεται**», δεν αφήνει αμφιβολίες για την «**ανηφορική κίνηση**», που με τις δικές μας επιλογές, δηλώνει **κίνηση προς τα δεξιά**, και εξασφαλίζει το θετικό πρόσημο, στην «**στιγμιαία ταχύτητα**» κίνησης, για κάθε t_0 .

Άσκηση B4: Ένα αερόστατο Α, **αφήνει το έδαφος** σε απόσταση 100m, από έναν παρατηρητή Π με ταχύτητα $50 \frac{\text{m}}{\text{min}}$. Με ποιο ρυθμό **αυξάνεται** η γωνία θ , που σχηματίζει η ΑΠ με το έδαφος, τη χρονική στιγμή κατά την οποία το μπαλόνι βρίσκεται σε ύψος 100m;

Λύση: Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\epsilon\phi\theta = \frac{h}{100}$, και συναρτήσει του χρόνου

$$\epsilon\phi\theta(t) = \frac{h(t)}{100}. \text{ Δίνεται } h'(t) = +50, \text{ και έτσι } (\epsilon\phi\theta(t))' = \frac{h'(t)}{100} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}.$$

$$(\epsilon\phi\theta(t))' = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2\theta(t)} \cdot \theta'(t) = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta'(t) = \frac{\sin^2\theta(t)}{2}.$$



Τη χρονική στιγμή t_0 , επειδή $h(t_0) = 100$, το ορθογώνιο τρίγωνο γίνεται ισοσκελές με $\theta(t_0) = \frac{\pi}{4}$.

$$\text{Έτσι, τη χρονική στιγμή } t_0, \theta'(t_0) = \frac{\sin^2\theta(t_0)}{2} = \frac{\left(\sin \frac{\pi}{4} \right)^2}{2} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \left(\frac{\text{rad}}{\text{min}} \right).$$

Σχόλιο: (1) Προφανώς το «**αφήνει το έδαφος**», δεν αφήνει αμφιβολίες για την κίνηση προς τα πάνω, δηλαδή ταχύτητα κίνησης με θετικό πρόσημο, σε άξονα ΒΑ με αρχή το σημείο Β, όπου «**φιλοξενούνται**» οι τιμές της **συνάρτησης θέσης**.

(2) Αν μας είχαν ζητήσει τον «**ρυθμό μεταβολής**» της απόστασης r , του αερόστατου Α από τον παρατηρητή Π, όταν το αερόστατο βρίσκεται σε ύψος 100m, αξιοποιώντας το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΑΠ, θα πέραμε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα, τη σχέση $r^2 = h^2 + 100^2$, η οποία συναρτήσει του χρόνου t γίνεται: $r^2(t) = h^2(t) + 100^2$. Παραγωγίζοντας τις δύο ίσες συναρτήσεις: $2r(t) \cdot r'(t) = 2h(t) \cdot h'(t)$, δηλαδή $r(t) \cdot r'(t) = h(t) \cdot h'(t)$, και τη χρονική στιγμή t_0 , επειδή $h(t_0) = 100$, έχουμε $r^2(t_0) = 100^2 + 100^2$,

$$\text{και } r(t_0) \cdot r'(t_0) = h(t_0) \cdot h'(t_0). \text{ Έτσι, } 100\sqrt{2} \cdot r'(t_0) = 100 \cdot 50, \text{ δηλαδή } r'(t_0) = 25\sqrt{2} \left(\frac{\text{m}}{\text{min}} \right).$$

Άσκηση Β5: Μια γυναίκα ύψους 1,60m, απομακρύνεται από τη βάση ενός φανοστάτη ύψους 8m, με ταχύτητα $0,8 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

Με ποια ταχύτητα αυξάνεται ο ίσκιος της;

Λύση: Προφανώς, τα x, s είναι συναρτήσεις του χρόνου t , και έτσι:

$x = x(t)$ και $s = s(t)$. Ας φανταστούμε το **πρώτο τεταρτημόριο**, ενός ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων, όπου το σημείο Π,

στον θετικό ημιάξονα των x , απομακρύνεται από την αρχή $O(0,0)$ με ταχύτητα $x'(t) = +0,8 \left(\frac{\text{m}}{\text{sec}} \right)$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΦΣ και ΠΚΣ, είναι όμοια αφού έχουν κοινή οξεία γωνία στην κορυφή Σ.

Έτσι, $\frac{(ΟΦ)}{(ΠΚ)} = \frac{(ΣΟ)}{(ΣΠ)}$, δηλαδή $\frac{8}{1,6} = \frac{x+s}{s}$, επομένως $5 \cdot s = x+s$, συνεπώς $4s = x$, και τελικά $s = \frac{x}{4}$.

Εκφράζοντας την τελική σχέση συναρτήσει του χρόνου t : $s(t) = \frac{x(t)}{4}$, μας δίνεται η δυνατότητα, παραγωγίζοντας τις ίσες συναρτήσεις, να βρούμε την ταχύτητα, $s'(t)$, με την οποία αυξάνεται ο ίσκιος

της γυναίκας: $s(t) = \frac{x(t)}{4} \Rightarrow [s(t)]' = \left[\frac{x(t)}{4} \right]' \Rightarrow s'(t) = \frac{x'(t)}{4} \Rightarrow s'(t) = \frac{0,8}{4} = 0,2 \left(\frac{\text{m}}{\text{sec}} \right)$.

Σχόλια: (1) Το «απομακρύνεται από τη βάση ενός φανοστάτη», μπορεί να δηλώσει κίνηση προς τα δεξιά, «οπότε» από το σχόλιο της σελίδας 92, προκύπτει η δυνατότητα για το συμπέρασμα μη αρνητικής ταχύτητας, άρα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ταχύτητα είναι $+0,8(\text{m/sec})$.

(2) Στο ερώτημα «Με ποια ταχύτητα αυξάνεται ο ίσκιος της;», το «αυξάνεται» είναι πλεονασμός, αφού η σχέση που αποδεικνύεται: $s = 0,25 \cdot x$, σαν συνάρτηση του x , $s(x) = 0,25 \cdot x$, είναι προφανώς γνησίως αύξουσα, και συνεπώς, αφού αυξάνεται το x , επομένως αυξάνεται και το s , δηλαδή αυξάνεται η σκιά.

(3) Προφανώς, υπάρχουν δύο άξονες για τις δυο **συναρτήσεις θέσης**, $x(t), s(t)$, με φορέα την ευθεία ΟΣ. Αυτός που «φιλοξενεί» τις τετμημένες θέσης της $x(t)$, με σταθερή αρχή το Ο, και αυτός που «φιλοξενεί» τις τετμημένες θέσης της $s(t)$, με μετακινούμενη προς τα δεξιά αρχή, το Π.

Μονάδες μέτρησης: Οι πιο σημαντικές **εξισώσεις**, από αυτές που χρησιμοποιήσαμε στα προβλήματα, προέρχονται από «μια επιτυχή προσπάθεια, να διατυπωθούν οι φυσικοί νόμοι, σε Μαθηματική μορφή, δηλαδή στη γλώσσα της Γεωμετρίας και (**τελικά**) της Άλγεβρας». Τα **φυσικά μεγέθη**, των οποίων οι αλγεβρικές τιμές επαληθεύουν τις εξισώσεις αυτές, έχουν μετρηθεί με συγκεκριμένες μονάδες μέτρησης. Η επιτυχής χρήση των μονάδων μέτρησης στις εξισώσεις, έχει για προϋπόθεση, να «γνωρίζουμε» τις μονάδες μέτρησης, οι μονάδες αυτές να χρησιμοποιούνται με συνέπεια, και να είναι «συνεργάσιμες».

(1) Οι «**Φυσικοί**», για να αποφύγουν τα λάθη που σχετίζονται με τον ορισμό της γωνίας, αφού το μέτρο μιας γωνίας ορίζεται σαν το μέτρο του αντίστοιχου τόξου, όταν η γωνία γίνει επίκεντρη, όρισαν σαν γωνία, το μέτρο της ($\theta = s : r$). Έτσι, θεωρούν τη γωνία «ένα μέγεθος χωρίς διαστάσεις», κάνουν πράξεις με το μέτρο της γωνίας, δηλαδή με τη γωνία, και βάζουν στο αποτέλεσμα το όνομα rad, επεξηγηματικά.

(2) Ασυνέπεια δείχνει όποιος εκφράζει, για παράδειγμα, ένα μήκος σε **m**, ένα άλλο σε **cm**, και στη συνέχεια κάνει πράξεις με τα μέτρα τους.

(3) «**Συνεργάσιμες**» μονάδες μέτρησης, είναι οι μονάδες που ανήκουν στο ίδιο «**σύστημα μονάδων μέτρησης**», και καθορίζονται από τους ορισμούς.

Τέλος, χρησιμοποιούμε εξισώσεις, που δεν είναι Μαθηματική έκφραση Φυσικών νόμων. Εκεί, η προσπάθεια να γίνουν πράξεις και με τις μονάδες μέτρησης, καταλήγει σε «**τραγωδία**». Άσκηση Α1: $r(t) = 4 - t^2$ ($\text{cm} = \text{sec}^2$!)

