

Το Θεώρημα Μέσης Τιμής και οι συνέπειές του.

1. Αν $f(x) = (x-1) \cdot \eta\mu x$, να αποδειχθεί ότι:

(i) Η εξίσωση $f'(x) = 0$, έχει μία ακριβώς λύση στο $(0,1)$.

(ii) Η εξίσωση $\epsilon\phi x = 1 - x$, έχει μία ακριβώς λύση στο $(0,1)$.

Απόδειξη: (i) $D_f = \mathbb{R}$, και προφανώς η f είναι «γινόμενο» παραγωγίσιμων (στο $\mathbb{R}$) συναρτήσεων.

Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = ((x-1) \cdot \eta\mu x)' = (x-1)' \cdot \eta\mu x + (x-1) \cdot (\eta\mu x)' = \eta\mu x + (x-1) \cdot \sigma\upsilon\nu x$
άρα η f είναι **παραγωγίσιμη**, και επομένως **συνεχής, σε κάθε διάστημα**.

Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = (\eta\mu x + (x-1) \cdot \sigma\upsilon\nu x)' = (\eta\mu x)' + (x-1)' \cdot \sigma\upsilon\nu x + (x-1) \cdot (\sigma\upsilon\nu x)' =$
 $= \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu x - (x-1) \cdot \eta\mu x = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu x + (1-x) \cdot \eta\mu x$, άρα η f' είναι **παραγωγίσιμη**,

και επομένως **συνεχής, σε κάθε διάστημα**.

1^η συνέχεια απόδειξης: Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$.

Επιπλέον, $f(0) = (0-1) \cdot \eta\mu 0 = 0$, $f(1) = (1-1) \cdot \eta\mu 1 = 0$ και επομένως $f(0) = f(1)$.

Έτσι, η f πληροί τις συνθήκες του θεωρήματος **Rolle** στο $[0,1]$

και συνεπώς η $f'(x) = 0$, έχει **μία τουλάχιστο λύση** στο $(0,1)$.

❖ Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0,1)$ με $x_1 \neq x_2$ και $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

Αν $x_1 < x_2$ (και ομοίως αν $x_1 > x_2$), επειδή η f' θα είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) ,

θα πληροί τις συνθήκες του θεωρήματος **Rolle** στο $[x_1, x_2]$,

και συνεπώς θα υπάρχει τουλάχιστο μια λύση της $f''(x) = 0$ στο (x_1, x_2) ,

κάτι που είναι **ΑΤΟΠΟ**, αφού $\forall x \in (x_1, x_2) \subset (0,1) \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, θα έχουμε $\sigma\upsilon\nu x > 0$, $\eta\mu x > 0$, $1-x > 0$

και συνεπώς $f''(x) = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu x + (1-x) \cdot \eta\mu x > 0$. Έτσι η $f'(x) = 0$, θα έχει **μία ακριβώς λύση** στο $(0,1)$.

2^η συνέχεια απόδειξης: Η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $f'(0) \cdot f'(1) < 0$,

αφού $f'(0) = \eta\mu 0 + (0-1) \cdot \sigma\upsilon\nu 0 = -1 < 0$ και $f'(1) = \eta\mu 1 + (1-1) \cdot \sigma\upsilon\nu 1 = \eta\mu 1 > 0$, επειδή $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$.

Έτσι, η f' πληροί τις συνθήκες του θεωρήματος **Bolzano** στο $[0,1]$

και συνεπώς η $f'(x) = 0$, έχει **μία τουλάχιστο λύση** στο $(0,1)$.

$\forall x \in (0,1) \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, θα έχουμε $\sigma\upsilon\nu x > 0$, $\eta\mu x > 0$, $1-x > 0$ και συνεπώς $f''(x) = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu x + (1-x) \cdot \eta\mu x > 0$.

Επειδή $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in (0,1)$, και f' συνεχής στο $[0,1]$, επομένως f' γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$,

δηλαδή η f' θα είναι 1-1 στο $[0,1]$ και συνεπώς δεν μπορεί να υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0,1)$ με $x_1 \neq x_2$

και $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$. Έτσι η $f'(x) = 0$, θα έχει **μία ακριβώς λύση** στο $(0,1)$.

Συμπλήρωμα: Το τόξο 1 rad , «τελειώνει στο 1^ο τεταρτημόριο», επειδή $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$, και συνεπώς $\eta\mu 1 > 0$.

Απόδειξη: (ii) Επειδή $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$, για κάθε $x \in (0,1)$, θα έχουμε:

$$\epsilon\phi x = 1 - x \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -(x-1) \Leftrightarrow \eta\mu x = -(x-1) \cdot \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu x + (x-1) \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0, \text{ στο } (0,1).$$

Όμως, η $f'(x) = 0$, όπως έχουμε αποδείξει στο (i), έχει **μία ακριβώς λύση** στο $(0,1)$,

και επομένως, η ισοδύναμή της εξίσωση, $\epsilon\phi x = 1 - x$, θα έχει επίσης **μία ακριβώς λύση** στο $(0,1)$.

Σχόλια: (1) Προφανώς, τα τμήματα των αποδείξεων για την ύπαρξη λύσης, και εκείνα για τη μοναδικότητα, μπορούν να συνδυαστούν με όλους τους τρόπους.

(2) Στο ερώτημα (ii), υπάρχει «αυτόνομη» απόδειξη.

$\epsilon\phi x = 1 - x \Leftrightarrow \epsilon\phi x + x - 1 = 0$ και η συνάρτηση $g(x) = \epsilon\phi x + x - 1$, πληροί τις συνθήκες του θεωρήματος

Bolzano στο $[0,1]$, αφού προφανώς είναι συνεχής και $g(0) \cdot g(1) = (\epsilon\phi 0 + 0 - 1) \cdot (\epsilon\phi 1 + 1 - 1) = -\epsilon\phi 1 < 0$.

Επίσης $g'(x) = (\epsilon\phi x + x - 1)' = \frac{1}{\sin^2 x} + 1 > 0$, στο $(0,1)$,

και έτσι η $g(x) = 0$, δηλαδή η $\epsilon\phi x = 1 - x$, έχει μία ακριβώς λύση στο $(0,1)$.

2. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2^x$ και $g(x) = -x^2 + 2x + 1$, έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία τα $A(0,1)$, $B(1,2)$.

Λύση: Επειδή, $f(0) = 2^0 = 1$, $g(0) = -0^2 + 2 \cdot 0 + 1 = 1$ και $f(1) = 2^1 = 2$, $g(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 2$

επομένως τα $A(0,1)$, $B(1,2)$ είναι κοινά σημεία των C_f και C_g .

Αν ορίσουμε συνάρτηση h , με $h(x) = f(x) - g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

θα έχουμε $h(0) = f(0) - g(0) = 1 - 1 = 0$ και $h(1) = f(1) - g(1) = 2 - 2 = 0$,

δηλαδή θα έχουμε ότι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g , θα είναι ρίζες της h .

Έτσι, αν η h έχει δυο ακριβώς ρίζες, τότε και οι C_f , C_g θα έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία τα A , B .

❖ Έστω ότι η h έχει τρεις ρίζες, $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$.

Η $h(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1$ είναι παραγωγίσιμη (στο $\mathbb{R}$) με $h'(x) = (2^x + x^2 - 2x - 1)' = 2^x \cdot \ln 2 + 2x - 2$,

επομένως η h θα πληροί τις συνθήκες του θεωρήματος **Rolle** στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$, $[\rho_2, \rho_3]$

και συνεπώς θα υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$, $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ με $h'(\xi_1) = h'(\xi_2) = 0$.

Η h' είναι παραγωγίσιμη (στο $\mathbb{R}$) με $h''(x) = (2^x \cdot \ln 2 + 2x - 2)' = 2^x \cdot \ln^2 2 + 2$, επομένως η h' θα πληροί τις συνθήκες του θεωρήματος **Rolle** στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ και συνεπώς θα υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ με $h''(\xi) = 0$.

Αυτό όμως δε μπορεί να συμβαίνει, (είναι ΑΤΟΠΟ) αφού προφανώς $h''(x) = 2^x \cdot \ln^2 2 + 2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς η h έχει δυο ακριβώς ρίζες και οι C_f , C_g έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία τα A , B .

Σχόλια: (1) Η μετατροπή του «προβλήματος» δυο συναρτήσεων,

σε «πρόβλημα» μιας συνάρτησης, ήταν για μια ακόμα φορά πετυχημένη.

(2) Παρόλο ότι γνωρίζαμε ότι η h είχε ρίζες $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, όταν χρειάστηκε να υποθέσουμε ότι η h έχει τρεις ρίζες, τις ονομάσαμε $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Αν είχαμε πει «έστω ότι υπάρχει και τρίτη ρίζα ρ », θα έπρεπε στη συνέχεια, να την τοποθετήσουμε σε σχέση με τις άλλες δύο. Έτσι θα είχαμε την υποχρέωση να κάνουμε τρεις αποδείξεις, ή να κάνουμε μία και να πούμε για τις άλλες «ομοίως...». (i) $\rho < 0 < 1$, (ii) $0 < \rho < 1$, (iii) $0 < 1 < \rho$.

3. Αν $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι $e^\alpha < \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} < e^\beta$.

Απόδειξη: Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι προφανώς παραγωγίσιμη (στο $\mathbb{R}$) με $f'(x) = (e^x)' = e^x$

και επομένως θα πληροί τις συνθήκες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, σε κάθε διάστημα $[a, \beta]$ με $a < \beta$.

Έτσι θα υπάρχει πάντα $\xi \in (a, \beta)$ με $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} = \frac{e^\beta - e^a}{\beta - a}$ και επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα,

θα έχουμε: $\xi \in (a, \beta) \Rightarrow a < \xi < \beta \Rightarrow f'(a) < f'(\xi) < f'(\beta) \Rightarrow e^a < \frac{e^\beta - e^a}{\beta - a} < e^\beta$

Συμπλήρωμα: $f''(x) = (e^x)' = e^x$ και επειδή προφανώς $f''(x) = e^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, θα έχουμε ότι $f' \nearrow$.

4. Δίνεται μια συνάρτηση f με $f'(x) \neq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε, ότι η εξίσωση $f(x) = x$, έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

Απόδειξη: Αφού $f'(x) \neq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα υπάρχει η $f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \stackrel{g(x)=f(x)-x}{\Leftrightarrow} g(x) = 0$ και επομένως, για να έχει η εξίσωση $f(x) = x$ το πολύ μια πραγματική ρίζα, «πρέπει και αρκεί», η συνάρτηση g να έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη (στο $\mathbb{R}$) με $g'(x) = (f(x) - x)' = f'(x) - (x)' = f'(x) - 1$, αφού οι συναρτήσεις f και $h(x) = x$ είναι παραγωγίσιμες (στο $\mathbb{R}$) και $g(x) = f(x) - h(x)$.

❖ Έστω ότι υπάρχουν $\rho_1 < \rho_2$ με $g(\rho_1) = g(\rho_2) = 0$.

Τότε, η συνάρτηση g θα πληροί τις συνθήκες του θεωρήματος **Rolle** στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ και συνεπώς θα υπάρχει $\rho \in (\rho_1, \rho_2)$ με $g'(\rho) = 0$. Όμως τότε, θα υπάρχει $\rho \in (\rho_1, \rho_2)$ με $f'(\rho) - 1 = 0$, δηλαδή $f'(\rho) = 1$.

ΑΤΟΠΟ, αφού $f'(x) \neq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έτσι, η συνάρτηση g θα έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα και συνεπώς η εξίσωση $f(x) = x$, θα έχει το πολύ μια πραγματική λύση.

Σχόλιο: Η πιο συνηθισμένη επιπολαιότητα, είναι να θεωρήσουμε ότι $f(x) = x$ είναι ο τύπος της f .

Πρόκειται για «πρόβλημα» ισότητας συναρτήσεων και αντιμετωπίστηκε με τη συνάρτηση «διαφορά».

5. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και ισχύει $f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in (-1, 1)$.

Αν $f(-1) = -1$ και $f(1) = 1$, να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$, εφαρμόζοντας το **Θεώρημα Μέσης Τιμής** για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$.

Απόδειξη 1η: Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$, θα είναι συνεχής και στα διαστήματα $[-1, 0]$, $[0, 1]$.

Επειδή $f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in (-1, 1)$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$

και επομένως θα είναι παραγωγίσιμη και στα διαστήματα $(-1, 0)$, $(0, 1)$.

Έτσι, η f πληροί τις συνθήκες του **Θεωρήματος Μέσης Τιμής**, στα διαστήματα $[-1, 0]$, $[0, 1]$

και επομένως υπάρχουν $\xi_1 \in (-1, 0)$ και $\xi_2 \in (0, 1)$

$$\text{με } f'(\xi_1) = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{f(0) - (-1)}{1} = f(0) + 1 \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1 - f(0)}{1} = 1 - f(0).$$

Επειδή $f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in (-1, 1)$, έχουμε $f'(\xi_1) \leq 1$ και $f'(\xi_2) \leq 1$, με συνέπεια:

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(\xi_1) \leq 1 \\ \text{και } f'(\xi_2) \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(0) + 1 \leq 1 \\ \text{και } 1 - f(0) \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(0) \leq 1 - 1 \\ \text{και } 1 - 1 \leq f(0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(0) \leq 0 \\ \text{και } 0 \leq f(0) \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = 0$$

Απόδειξη 2η: Έστω $f(0) = \omega > 0$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$, θα είναι συνεχής και στο διάστημα $[-1, 0]$.

Επειδή $f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in (-1, 1)$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$

και επομένως θα είναι παραγωγίσιμη και στο διάστημα $(-1, 0)$.

Έτσι, η f πληροί τις συνθήκες του **Θεωρήματος Μέσης Τιμής**, στο διάστημα $[-1, 0]$

$$\text{και επομένως υπάρχει } \xi \in (-1, 0) \text{ με } f'(\xi) = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{\omega - (-1)}{1} = \omega + 1 > 1 \quad \boxed{\omega > 0 \Rightarrow \omega + 1 > 1}.$$

ΑΤΟΠΟ, αφού $f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in (-1, 1)$.

Ομοίως, αν $f(0) = \omega < 0$ (εργαζόμενοι στο $[0, 1]$) και επομένως $f(0) = 0$.

6. Να αποδείξετε ότι, αν $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [0, +\infty)$ και $f(0) = 0$,

τότε $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

Απόδειξη : Επειδή $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [0, +\infty)$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$.

Έτσι, για κάθε $x \in (0, +\infty)$, η f θα είναι παραγωγίσιμη στο $[0, x]$, θα πληροί τις συνθήκες του Θεωρήματος

Μέσης Τιμής στο διάστημα $[0, x]$ και επομένως θα υπάρχει $\xi_x \in (0, x)$ με $f'(\xi_x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}$.

Επειδή $f'(\xi_x) \geq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, άρα $\frac{f(x)}{x} \geq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Όμως, $\frac{f(x)}{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \cdot x \geq 0 \cdot x \Rightarrow f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

και συνεπώς, αφού $f(0) = 0$, θα έχουμε $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

7. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0, 4]$ και ισχύει $2 \leq f'(x) \leq 5$ για κάθε $x \in (0, 4)$.

Αν $f(0) = 1$, να αποδείξετε ότι $9 \leq f(4) \leq 21$.

Απόδειξη : Προφανώς η f είναι συνεχής στο $[0, 4]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 4)$.

Έτσι, η f πληροί τις συνθήκες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[0, 4]$

και συνεπώς υπάρχει $\xi \in (0, 4)$ με $f'(\xi) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{f(4) - 1}{4}$.

Όμως, $2 \leq f'(x) \leq 5$ για κάθε $x \in (0, 4)$, άρα $2 \leq f'(\xi) \leq 5$ και επομένως $2 \leq \frac{f(4) - 1}{4} \leq 5$.

$2 \leq \frac{f(4) - 1}{4} \leq 5 \Leftrightarrow 2 \cdot 4 \leq f(4) - 1 \leq 5 \cdot 4 \Leftrightarrow 8 + 1 \leq f(4) - 1 + 1 \leq 20 + 1$ και συνεπώς $9 \leq f(4) \leq 21$.

8. Αν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = \frac{x}{1+x^2}$,

να αποδείξετε ότι για όλα τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|f(\beta) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|\beta - \alpha|$.

Απόδειξη : Η σχέση ισχύει για $\alpha = \beta$, αφού $f(\alpha) = f(\beta)$ και έτσι $|f(\beta) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|\beta - \alpha| \Leftrightarrow 0 \leq 0$.

Για $\alpha \neq \beta$, $|f(\beta) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|\beta - \alpha| \Leftrightarrow \frac{|f(\beta) - f(\alpha)|}{|\beta - \alpha|} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left| \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \right| \leq \frac{1}{2}$.

Έστω ότι $\alpha < \beta$. Προφανώς η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, επομένως πληροί τις συνθήκες του

Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και συνεπώς υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$.

$\left| \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \right| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow |f'(\xi)| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left| \frac{\xi}{1+\xi^2} \right| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|\xi|}{|1+\xi^2|} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2|\xi| \leq 1+\xi^2 \Leftrightarrow 1+|\xi|^2 - 2|\xi| \geq 0 \Leftrightarrow (|\xi| - 1)^2 \geq 0$

Επειδή, προφανώς, ισχύει η $(|\xi| - 1)^2 \geq 0$, θα ισχύει και η $|f(\beta) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|\beta - \alpha|$ (1).

Ομοίως αποδεικνύεται η σχέση (1), για $\alpha > \beta$, αν εργαστούμε στο $[\beta, \alpha]$, και έτσι η (1) ισχύει $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Σχόλιο: Γράψαμε: «... η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, επομένως πληροί τις συνθήκες του Θ.Μ.Τ. ...»

Προφανώς, αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, επομένως είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) . Στο Θ.Μ.Τ., όπως και σε κάθε θεώρημα, τίθενται οι «ελάχιστες» προϋποθέσεις για να ισχύει το συμπέρασμα. Προφανώς, το συμπέρασμα ισχύει, και όταν διαθέτουμε «ευρύτερες» προϋποθέσεις.

9. Αν για μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$, ισχύει $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$,
να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. «Κοντά στο x_0 », θα έχουμε $x \neq x_0$ και $|f(x) - f(x_0)| \leq (x - x_0)^2$.

$$|f(x) - f(x_0)| \leq (x - x_0)^2 \Leftrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0|^2 \Leftrightarrow \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq |x - x_0| \Leftrightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq |x - x_0| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -|x - x_0| \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq |x - x_0| \text{ και επειδή } \lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0| = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (-|x - x_0|), \text{ από το κριτήριο παρεμβολής}$$

$$\text{θα έχουμε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \text{ και συνεπώς } f'(x_0) = 0.$$

Αφού για το τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$, ισχύει $f'(x_0) = 0$, επομένως θα ισχύει $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
και συνεπώς η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Σχόλιο: Το εσωτερικό του $\mathbb{R}$, είναι το $\mathbb{R}$, και αυτό ισχύει και για κάθε ανοικτό διάστημα.

Στην περίπτωση μας η f ήταν παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, και επομένως συνεχής στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

10. Αν f συνεχής συνάρτηση σε διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) με $f(a) = f(b) = 0$,
να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$, τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(\xi) = f(\xi)$.

Απόδειξη: Αν ορίσουμε συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, τότε η g είναι συνεχής στο $[a, b]$,

σαν «πηλίκο» συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (a, b) , με

$$g'(x) = \left(\frac{f(x)}{e^x} \right)' = \frac{f'(x) \cdot e^x - f(x) \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{f'(x) \cdot e^x - f(x) \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{(f'(x) - f(x)) \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$$

$$\text{Επειδή επιπλέον } g(a) = \frac{f(a)}{e^a} = \frac{0}{e^a} = 0 \text{ και } g(b) = \frac{f(b)}{e^b} = \frac{0}{e^b} = 0, \text{ η } g \text{ ικανοποιεί τις υποθέσεις του}$$

Θεωρήματος **Rolle** στο διάστημα $[a, b]$ και συνεπώς υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $g'(\xi) = 0$.

$$\text{Όμως, } g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi) - f(\xi)}{e^\xi} = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - f(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = f(\xi)$$

και συνεπώς υπάρχει $\xi \in (a, b)$, τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(\xi) = f(\xi)$.

Σχόλιο: Αν δεν υπήρχε η ΕΦΑΡΜΟΓΗ (στη σ. 252) του σχ. βιβλίου, ίσως να μη μας «πήγαινε στο μυαλό»

η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, αν και η ισότητα $f' = f$ «φέρνει στο μυαλό» την e^x .

11. Να αποδειχθεί ότι αν $x > 0$, τότε $e^x > x + 1$.

Απόδειξη: $e^x > x + 1 \Leftrightarrow e^x - x - 1 > 0$ και αν θέσουμε $f(x) = e^x - x - 1$, η f θα είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

$$\text{με } f'(x) = (e^x - x - 1)' = e^x - 1 \text{ και ομοίως η } f' \text{ θα είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R}, \text{ με } f''(x) = (e^x - 1)' = e^x.$$

Επειδή $f''(x) = e^x > 0$ στο $\mathbb{R}$, (f' συνεχής στο $\mathbb{R}$) επομένως η f' θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

$$\text{και έτσι } x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) \Rightarrow f'(x) > e^0 - 1 = 0, \text{ δηλαδή } f'(x) > 0 \text{ στο } (0, +\infty).$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και $f'(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$, η f θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

$$\text{και συνεπώς για } x > 0 \text{ θα έχουμε: } x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow e^x - x - 1 > e^0 - 0 - 1 \Rightarrow e^x - x - 1 > 0 \Rightarrow e^x > x + 1.$$

Σχόλια: (1) Μελετώντας την $f(x) = e^x - x - 1$, ως προς τη **μονοτονία**,

προκύπτει ότι $e^x \geq x+1$ στο $\mathbb{R}$ και $e^x > x+1$ στο $\mathbb{R}^*$.

$f'(0) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ και επειδή f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, το $x_0 = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της f' .

Επειδή η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, διατηρεί το πρόσημό της, στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Αφού η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και $f'(x) < 0$ στο $(-\infty, 0)$,

η f θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και επομένως

$$x < 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow e^x - x - 1 > e^0 - 0 - 1 \Rightarrow e^x - x - 1 > 0 \Rightarrow e^x > x + 1.$$

Αφού η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και $f'(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$, η f θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

$$\text{και επομένως } x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow e^x - x - 1 > e^0 - 0 - 1 \Rightarrow e^x - x - 1 > 0 \Rightarrow e^x > x + 1.$$

Άρα $e^x > x+1$ στο $\mathbb{R}^*$ και $e^x \geq x+1$ στο $\mathbb{R}$, αφού $x \leq 0 \Rightarrow e^x \geq x+1$ και $x \geq 0 \Rightarrow e^x \geq x+1$.

(2) Τα ίδια συμπεράσματα προκύπτουν, μελετώντας την $g(x) = e^x$ ως προς την **κυρτότητα**,

σε σχέση με την εφαπτομένη $\varepsilon: y = x+1$, της C_g στο $A(0,1)$.

Επειδή $g''(x) = e^x > 0$ στο $\mathbb{R}$, επομένως η g (συνεχής στο $\mathbb{R}$) είναι **κυρτή** στο $\mathbb{R}$

και συνεπώς η C_g είναι «πάνω» από κάθε εφαπτομένη της, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Αφού $g(0) = e^0 = 1$, άρα το σημείο $A(0,1)$, είναι σημείο της C_g

και η εφαπτομένη της C_g στο A , έχει εξίσωση $y-1 = g'(0) \cdot (x-0)$, δηλαδή $\varepsilon: y = x+1$.

Έτσι το ότι η C_g είναι «πάνω» από την $\varepsilon: y = x+1$, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους,

σημαίνει ότι $g(x) > y$, δηλαδή $e^x > x+1$ στο $\mathbb{R}^*$ και $e^x \geq x+1$ στο $\mathbb{R}$.

12. Να αποδείξετε ότι:

(i) Η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - 3x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι γνησίως αύξουσα.

(ii) $2\eta\mu x + \varepsilon\phi x \geq 3x$, για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Απόδειξη: (i) Η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

$$\text{και παραγωγίσιμη στο } \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ με } f'(x) = (2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - 3x)' = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

Παρατηρώντας ότι η εξίσωση $2x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ έχει προφανή λύση το $x_0 = 1$, ή διασπώντας το μεσαίο όρο,

ή με το «σχήμα **Horner**», μετασχηματίζουμε την $f'(x)$, ως εξής:

$$f'(x) = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 (2\sigma\upsilon\nu x + 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

Έτσι, παρατηρώντας ότι $f'(x) > 0$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(ii) Όπως έχουμε αποδείξει, η συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Έτσι, για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, θα έχουμε $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ και συνεπώς $f(0) \leq f(x)$.

Επειδή όμως $f(0) = 0$, θα έχουμε $f(0) \leq f(x) \Rightarrow 0 \leq 2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - 3x \Rightarrow 2\eta\mu x + \varepsilon\phi x \geq 3x$.

Σχόλιο: Δεν είναι πάντα εύκολο, με διαδοχικές παραγωγίσεις, να δίνουμε «προφανή» λύση στο πρόβλημα μονοτονίας μιας συνάρτησης. Θα πρέπει να φρεσκάρουμε και τις «στοιχειώδεις» γνώσεις μας.