

Μονοτονία – Ακρότατα

§2.6 – B2: i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + \alpha$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 1]$.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $[-1, 1]$.

iii) Αν $-2 < \alpha < 2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - 3x + \alpha = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(-1, 1)$.

Λύση: Προφανώς, η f είναι **συνεχής** στο $D_f = \mathbb{R}$, ως πολυωνυμική, και επομένως είναι συνεχής σε κάθε διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη**, με $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$.

i) Έχουμε: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$,

$f'(0) = -3 < 0$ και ότι η f' είναι συνεχής στο $(-1, 1)$, ως πολυωνυμική.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι: $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (-1, 1)$, και επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$, έχουμε: $f \searrow [-1, 1]$, δηλαδή ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$.

ii) Αφού η f είναι **συνεχής** στο $[-1, 1]$, και με δεδομένο ότι είναι **γνησίως φθίνουσα** σε αυτό, θα έχουμε: $f([-1, 1]) \stackrel{f \searrow}{=} [f(1), f(-1)] = [\alpha - 2, \alpha + 2]$, δηλαδή ότι το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $[-1, 1]$, είναι το διάστημα $[\alpha - 2, \alpha + 2]$.

iii) Για να έχει η εξίσωση $x^3 - 3x + \alpha = 0$, **λύση** στο διάστημα $(-1, 1)$, «πρέπει και αρκεί» η συνάρτηση f , να έχει **ρίζα** στο $(-1, 1)$. Επειδή η f είναι **συνεχής** στο $[-1, 1]$, για να έχει **ρίζα** στο εσωτερικό του, από το θεώρημα Bolzano, **αρκεί** $f(-1) \cdot f(1) < 0$.

$$f(-1) \cdot f(1) < 0 \Leftrightarrow (\alpha + 2) \cdot (\alpha - 2) < 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2^2 < 0 \Leftrightarrow |\alpha|^2 < 2^2 \Leftrightarrow |\alpha| < 2 \Leftrightarrow -2 < \alpha < 2.$$

Με δεδομένο ότι $-2 < \alpha < 2$, ισχύει $f(-1) \cdot f(1) < 0$, και συνεπώς υπάρχει $x_0 \in (-1, 1)$: $f(x_0) = 0$, το οποίο είναι **μοναδικό**, αφού⁽¹⁾ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 1)$.

Έτσι, η εξίσωση $x^3 - 3x + \alpha = 0$, έχει **ακριβώς μία λύση** στο διάστημα $(-1, 1)$.

Σχόλια: (1) Στη **σελίδα 34**, εξασφαλίζεται ότι κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση f είναι «1-1», και επομένως αν η εξίσωση $f(x) = y$ έχει λύση, ως προς x , τότε αυτή είναι **ακριβώς μία**.

(2) Στο (i), εξασφαλίζεται ότι $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (-1, 1)$, αφού η $f'(x)$ είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο με **δύο άνισες** πραγματικές ρίζες, και επομένως παίρνει «εντός των ριζών» τιμές **ετερόσημες** του $(+3)$, δηλαδή **αρνητικές**. (Ο $+3$ είναι συντελεστής του x^2 .)

(3) Στο (iii): $-2 < \alpha < 2 \Rightarrow \{\alpha < 2 \text{ και } -2 < \alpha\} \Rightarrow \{\alpha - 2 < 0 \text{ και } 0 < \alpha + 2\} \Rightarrow f(1) < 0 < f(-1)$ και αφού η f είναι **συνεχής** στο $[-1, 1]$, επομένως (Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών), υπάρχει $x_0 \in (-1, 1)$: $f(x_0) = 0$, το οποίο είναι **μοναδικό**, αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 1)$.

Έτσι, η εξίσωση $x^3 - 3x + \alpha = 0$, έχει **ακριβώς μία λύση** στο $(-1, 1)$.

Αλλιώς: $-2 < \alpha < 2 \Rightarrow \{\alpha < 2 \text{ και } -2 < \alpha\} \Rightarrow \{\alpha - 2 < 0 \text{ και } 0 < \alpha + 2\} \Rightarrow 0 \in (\alpha - 2, \alpha + 2) =$
 $= \left(\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \right) = f((-1, 1))$, δηλαδή το **0** ανήκει στο **σύνολο τιμών** της f , για $x \in (-1, 1)$.

B3: Η θέση ενός κινητού πάνω σε άξονα τη χρονική στιγμή t , δίνεται από τη συνάρτηση:
 $x = S(t) = t^4 - 8t^3 + 18t^2 - 16t + 160, 0 \leq t \leq 5$. Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του κινητού, και στη συνέχεια να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

- Πότε το κινητό έχει ταχύτητα μηδέν;
- Πότε το κινητό κινείται προς τα δεξιά και πότε προς τα αριστερά;
- Πότε η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται και πότε μειώνεται;

Λύση: Η συνάρτηση θέσης του κινητού, $x(t) = S(t) = t^4 - 8t^3 + 18t^2 - 16t + 160, 0 \leq t \leq 5$, ως πολυωνυμική, θα μπορούσε να «εργαστεί» σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$, όπου αυτή και οι παράγωγοί της, θα ήταν συνεχείς. Έτσι, είναι προφανώς **συνεχής και δυο φορές παραγωγίσιμη** στο $[0, 5]$. με

$$\text{ταχύτητα: } v(t) = x'(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t - 16 = 4(t^3 - 6t^2 + 9t - 4) =$$

$$= 4(t-1)(t^2 - 5t + 4) = 4(t-1)(t-4)(t-1) = 4(t-4)(t-1)^2,$$

1	-6	9	-4	1
	1	-5	4	
1	-5	4	0	

$$\text{και επιτάχυνση: } a(t) = v'(t) = x''(t) = 12t^2 - 48t + 36 = 12(t^2 - 4t + 3) = 12(t-1)(t-3).$$

(i) $v(t) = x'(t) = 0 \Leftrightarrow 4(t-4)(t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \{t=1 \text{ ή } t=4\}$, και επομένως το κινητό έχει ταχύτητα μηδέν, στις χρονικές στιγμές $t_1 = 1$ και $t_2 = 4$.

(ii) Το κινητό κινείται προς τα **δεξιά**, στα χρονικά διαστήματα στα οποία η συνάρτηση θέσης είναι **γνησίως αύξουσα**, και προς τα **αριστερά**, όταν η συνάρτηση θέσης είναι **γνησίως φθίνουσα**.

t	0	1	4	5	
$x'(t)$	-	0	-	0	+
$x(t)$					

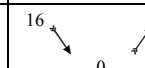
Έτσι, αφού η $x'(t)$ διατηρεί πρόσημο στο $(0, 1) \cup (1, 4)$ και η $x(t)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 4]$, η $x(t)$ είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $[0, 4]$, και το κινητό κινείται προς τα **αριστερά**, ενώ στο διάστημα $[4, 5]$ όπου η $x(t)$ είναι **γνησίως αύξουσα**, το κινητό κινείται προς τα **δεξιά**.

(iii) **Ορισμός:** Η ευθύγραμμη κίνηση ενός κινητού λέγεται **επιταχυνόμενη** (αντιστοίχως **επιβραδυνόμενη**), όταν το μέτρο της ταχύτητας $v(t)$, δηλαδή η $|v(t)|$, **αυξάνεται** (αντιστοίχως **μειώνεται**). Έτσι, η ταχύτητα του κινητού **αυξάνεται** όταν **το μέτρο της αυξάνεται**, και **μειώνεται**, όταν **το μέτρο της μειώνεται**.

Προφανώς, η κίνηση είναι επιταχυνόμενη όταν $v(t) \cdot a(t) > 0$, δηλαδή όταν ταχύτητα και επιτάχυνση έχουν την ίδια «κατεύθυνση», και επιβραδυνόμενη όταν $v(t) \cdot a(t) < 0$, δηλαδή όταν ταχύτητα και επιτάχυνση έχουν αντίθετη «κατεύθυνση».

Επομένως, η κίνηση είναι **επιταχυνόμενη** στα διαστήματα $[1, 3]$ και $[4, 5]$, αφού $v(t) \cdot a(t) > 0$, στα αντίστοιχα ανοικτά

διαστήματα, και **επιβραδυνόμενη** στα διαστήματα $[0, 1]$ και $[3, 4]$, αφού $v(t) \cdot a(t) < 0$, στα αντίστοιχα ανοικτά διαστήματα.

t	0	1	3	4	5	
$\nu(t)$	-	0	-	-	0	+
$\alpha(t)$	+	0	-	0	+	+
$ \nu(t) $		16	0	16	0	64

Σχόλιο: Στην κατακόρυφη βολή προς τα **πάνω**, η ταχύτητα του βλήματος είναι **θετική**, ενώ η επιτάχυνση **αρνητική**, αφού η επιτάχυνση της βαρύτητας έχει «κατεύθυνση» προς το κέντρο της γης, δηλαδή προς τα **κάτω**. $[v(t) \cdot a(t) < 0]$ Έτσι η ταχύτητα **μειώνεται**, δηλαδή η κίνηση είναι **επιβραδυνόμενη**. Κάποια χρονική στιγμή, η ταχύτητα του βλήματος μηδενίζεται και αρχίζει η πτώση του. Όταν το βλήμα αρχίζει να πέφτει, τότε η ταχύτητά του έχει την ίδια «κατεύθυνση» με την επιτάχυνση της βαρύτητας, δηλαδή προς τα **κάτω**, οπότε είναι και οι δύο **αρνητικές**. $[v(t) \cdot a(t) > 0]$ Έτσι η ταχύτητα **αυξάνεται**, δηλαδή η κίνηση είναι **επιταχυνόμενη**.

§2.7 – Α2β: Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^3 - 3x + 2 = 0$.

Λύση: Η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 2$ είναι προφανώς **συνεχής** στο $D_f = \mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, και **παραγωγίσιμη**, με $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$ όπου $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Επειδή η $f'(x)$ είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο, με συντελεστή (+3)

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	-0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

για τον μεγιστοβάθμιο όρο (x^2), διατηρεί «**εκτός των ριζών**»,

σταθερά **θετικό** πρόσημο, δηλαδή ομόσημο του (+3), και **αρνητικό**

«**εντός των ριζών**», δηλαδή ετερόσημο του (+3). Έτσι, $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$,

και $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (-1, 1)$, και με δεδομένη τη **συνέχεια** της f , σε κάθε διάστημα του $\mathbb{R}$,

προκύπτει ότι: $f \nearrow (-\infty, -1]$, $f \nearrow [1, +\infty)$, $f \searrow [-1, 1]$, και συνεπώς για το σύνολο τιμών έχουμε:

- $f((-\infty, -1]) \stackrel{f'}{=} \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-1) \right] = \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3), 4 \right] = (-\infty, 4]$, και επειδή $0 \in (-\infty, 4]$, επομένως υπάρχει (**μοναδικό**) $x_1 \in (-\infty, -1] : f(x_1) = 0$, και συνεπώς $x_1^3 - 3x_1 + 2 = 0$, δηλαδή η εξίσωση έχει λύση x_1 στο διάστημα $(-\infty, -1]$, η οποία είναι **μοναδική** στο διάστημα αυτό, αφού $f \nearrow (-\infty, -1]$.

- $f([1, +\infty)) \stackrel{f'}{=} \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] = \left[0, \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) \right] = [0, +\infty)$, και επειδή $0 \in [0, +\infty)$, με $f(1) = 0$, επομένως υπάρχει το $x_2 = 1 : f(x_2) = 0$, και συνεπώς $x_2^3 - 3x_2 + 2 = 0$, δηλαδή η εξίσωση έχει λύση $x_2 = 1$ στο διάστημα $[1, +\infty)$, η οποία είναι **μοναδική** στο διάστημα αυτό, αφού $f \nearrow [1, +\infty)$.

- $f([-1, 1]) \stackrel{f'}{=} \left[f(1), f(-1) \right] = [0, 4]$, και επειδή $0 \in [0, 4]$, με $f(1) = 0$, το ήδη γνωστό $x_2 = 1$ επανεμφανίζεται σαν **μοναδική** $f \searrow [-1, 1]$ **λύση** της εξίσωσης στο διάστημα $[-1, 1]$.

Αφού $x_1 \in (-\infty, -1]$, επομένως $x_1 \leq -1 < 1 = x_2$, και έτσι, αν μετρήσουμε από μία φορά μόνο τις άνισες λύσεις της εξίσωσης, θα πούμε ότι «το πλήθος των ριζών της εξίσωσης» είναι ο αριθμός **2**.

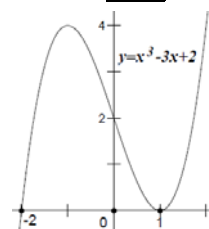
Σχόλια: (1) Η εξίσωση μπορεί να λυθεί και με τις «παλιές μεθόδους». Έτσι προσφέρεται, για την εκπαίδευσή μας στα «νέα όπλα».

$$\triangleright x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 (x+2) = 0,$$

όπου διαπιστώνεται η ύπαρξη λύσης $x_1 = -2$, και «διπλής λύσης» $x_2 = 1$.

Η «επαλήθευση» αυτή είναι ωφέλιμη, αφού επιβεβαιώνει την πεποίθησή μας ότι η $x_2 = 1$, είναι «διπλή λύση», αφού η $x_2 = 1$, είναι ρίζα και της f' , με τον άξονα των x , να εφάπτεται της C_f .

1	0	-3	2	1
	1	1	-2	
1	1	-2	0	



(2) Η μέθοδος που αναπτύξαμε, έχει πραγματική αξία για πιο «σύνθετες» εξισώσεις από τις πολυωνυμικές, και από τις πολυωνυμικές, για εκείνες που έχουν βαθμό τουλάχιστον πέντε.

Κυρίως έχει αξία, αν μας ενδιαφέρει η **ύπαρξη λύσεων**, και όχι οι ίδιες οι λύσεις.

(3) Η εξίσωση $x^3 - 3x + \sqrt{2} = 0$, «φαντάζει» πιο δύσκολη, αν και λύνεται, και «παραδοσιακά».

Η $g(x) = x^3 - 3x + \sqrt{2}$ έχει τρεις άνισες ρίζες: $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{2,3} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{2}$

Επειδή $g'(x) = f'(x)$ στο $\mathbb{R}$, αξιοποιείται ο πίνακας της f .

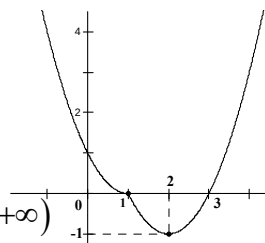
1	0	-3	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
	$\sqrt{2}$	2	$-\sqrt{2}$	
1	$\sqrt{2}$	-1	0	

$$0 \in g([-1, 1]) \stackrel{g'}{=} \left[g(1), g(-1) \right] = \left[-2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2} \right]$$

$$0 \in g((-\infty, -1]) \stackrel{g'}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), g(-1) \right) = (-\infty, 2 + \sqrt{2}] \text{ και } 0 \in g([1, +\infty)) \stackrel{g'}{=} \left[g(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) = [-2 + \sqrt{2}, +\infty)$$

A3ii: Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία

και τα ακρότατα, τη συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & x < 1 \\ x^2 - 4x + 3, & x \geq 1 \end{cases}$



Λύση: Η f είναι συνεχής στο $D_f = \mathbb{R}$, αφού είναι συνεχής στα $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$ ως πολυωνυμική, και αφού $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 2x + 1) = 0 = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 4x + 3) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$, που δηλώνει ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$.

Προφανώς $f'(x) = 2x - 2$ στο $(-\infty, 1)$, και $f'(x) = 2x - 4$ στο $(1, +\infty)$.

Στο $(-\infty, 1)$, η $f'(x) = 0$ είναι αδύνατη, αφού $2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$,

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$			-1	

με την $x = 1$ αδύνατη στο $(-\infty, 1)$. Επίσης $x \in (-\infty, 1) \Rightarrow x < 1 \Rightarrow 2x < 2 \Rightarrow 2x - 2 < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$.

Στο $(1, +\infty)$, ισχύει $f'(x) = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, και επομένως το $x_1 = 2$ είναι ρίζα της f' .

$x \in (1, 2) \Rightarrow x < 2 \Rightarrow 2x < 4 \Rightarrow 2x - 4 < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ και $x \in (2, +\infty) \Rightarrow x > 2 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow 2x - 4 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$.

Επειδή η f' διατηρεί το αρνητικό πρόσημο εκατέρωθεν του $x_0 = 1$, δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο αυτό, και λόγω της συνέχειας της, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$,

και επομένως $x \in (-\infty, 2] \Rightarrow x \leq 2 \xRightarrow[f \text{ συνάρτηση}]{f \wedge} f(x) \geq f(2)$. (a)

Επίσης, αφού η f είναι συνεχής στο $[2, +\infty)$, και $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (2, +\infty)$, η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$, και επομένως $x \in [2, +\infty) \Rightarrow x \geq 2 \xRightarrow[f \text{ συνάρτηση}]{f'} f(x) \geq f(2)$. (b)

Έτσι, από τις σχέσεις (a) και (b), προκύπτει ότι $f(x) \geq f(2)$, για κάθε $x \in \mathbb{R} = D_f$, και συνεπώς η

f , στο $x_1 = 2 \in D_f$, παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο το $f(2) = -1$. $\boxed{\min f(x) = -1 = f(2)}$

Σχόλια: (1) Στον πίνακα για τη «μονοτονία και τα ακρότατα», όταν η συνάρτηση είναι «κλαδική», πάντα βάζουμε το «συννοριακό σημείο», στο οποίο τα θεωρήματα απαιτούν «συνέχεια».

$$(2) \ x \in (-\infty, 2] \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < 2 \xRightarrow{f \wedge} f(x) > f(2) \\ \text{ή} \\ x = 2 \xRightarrow[f \text{ συνάρτηση}]{} f(x) = f(2) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \geq f(2)$$

B6: Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = (x - \alpha)^2 \cdot (x - \beta)^2 \cdot (x - \gamma)^2$, με $\alpha < \beta < \gamma$, έχει τρία τοπικά ελάχιστα και δύο τοπικά μέγιστα.

Λύση: $f'(x) = [(x - \alpha)^2]' \cdot (x - \beta)^2 \cdot (x - \gamma)^2 + (x - \alpha)^2 \cdot [(x - \beta)^2]' \cdot (x - \gamma)^2 + (x - \alpha)^2 \cdot (x - \beta)^2 \cdot [(x - \gamma)^2]' =$
 $= 2(x - \alpha) \cdot (x - \beta) \cdot (x - \gamma) \cdot [(x - \beta) \cdot (x - \gamma) + (x - \alpha) \cdot (x - \gamma) + (x - \alpha) \cdot (x - \beta)]$ και προφανώς, τα α, β, γ είναι ρίζες της f' . Η συνάρτηση f , προφανώς πληροί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στα διαστήματα $[\alpha, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$, και συνεπώς υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ και $\xi_2 \in (\beta, \gamma)$, με $f'(\xi_1) = 0 = f'(\xi_2)$.

Προφανώς τα ξ_1, ξ_2 είναι ρίζες της αγκύλης που

περιέχει δευτεροβάθμιο τριώνυμο, με συντελεστή

για το x^2 , το $(+1)$. Έτσι «εντός» των ξ_1, ξ_2 η αγκύλη

x	$-\infty$	α	ξ_1	β	ξ_2	γ	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0
$f(x)$			T.E.	T.M.	T.E.	T.M.	T.E.

είναι αρνητική, και «εκτός» θετική. Για παράδειγμα, θα δούμε το πρόσημο $(-)$, όταν $x \in (\xi_1, \beta)$.

$\alpha < \xi_1 < x < \beta < \xi_2 < \gamma \Rightarrow \{(x - \alpha) > 0, (x - \beta) < 0, (x - \gamma) < 0 \text{ και } [\dots] < 0\}$, άρα $f'(x) < 0$.