

ΚΥΡΤΑ – ΚΟΙΛΑ και ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

Α1i: Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 2$ είναι κυρτή ή κοίλη, και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής της C_f .

Λύση: Προφανώς, η συνάρτηση f είναι **συνεχής και παραγωγίσιμη** στο $\mathbb{R}$, ως **πολυωνυμική**.

Επειδή η παράγωγος πολυωνυμικής συνάρτησης είναι επίσης πολυωνυμική συνάρτηση, επομένως όλες οι παράγωγοι της f , ανεξάρτητα από την τάξη τους, είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμικές. Έτσι, η $f'(x) = 15x^4 - 20x^3$, είναι **συνεχής και παραγωγίσιμη** στο $\mathbb{R}$, όπως επίσης και η $f''(x) = 60x^3 - 60x^2$, είναι **συνεχής και παραγωγίσιμη** στο $\mathbb{R}$.

$$f''(x) = 60x^3 - 60x^2 = 60x^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow \{x=0 \text{ ή } x=1\}$$

- Τα $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$ είναι διαδοχικές ρίζες της $f''(x)$, και έτσι:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$-$	$+$
$f(x)$				

(1) αφού η f'' είναι συνεχής στο $(1, +\infty)$, με $f''(2) = 60 \cdot 2^2 \cdot (2-1) = 240 > 0$, προκύπτει ότι $f''(x) > 0$, στο $(1, +\infty)$, και επειδή η f είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$, επομένως η f είναι **κυρτή** στο $[1, +\infty)$.

(2) αφού η f'' είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$, με $f''(-1) = -120 < 0$, προκύπτει ότι $f''(x) < 0$, στο $(-\infty, 0)$, και ομοίως από το $f''(0,5) = -7,5 < 0$, προκύπτει ότι $f''(x) < 0$, στο $(0,1)$, επομένως η $f'' = (f')'$ διατηρεί το **αρνητικό** πρόσημο στο $(-\infty, 0) \cup (0,1)$, και επειδή η f' είναι συνεχής στο $(-\infty, 1)$ θα έχουμε ότι η f' είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(-\infty, 1)$, που αν συνδυαστεί με τη συνέχεια της f στο $[1, +\infty)$, μας δίνει σαν τελικό συμπέρασμα, ότι η συνάρτηση f είναι **κοίλη** στο $[1, +\infty)$.

- Η συνάρτηση f ορίζεται στο $(0, +\infty)$, και για το $x_0 = 1 \in (0, +\infty)$, ορίζεται εφαπτομένης της C_f στο $A(1,0)$, με κλίση $f'(x_0) = f'(1) = -5$, και επειδή η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του $x_0 = 1$, το σημείο $A(x_0, f(x_0)) \equiv A(1,0)$, είναι **σημείο καμπής** της C_f .

Σχόλια: (1) Στην $f''(x) = 60x^2(x-1)$, μπορούμε να παρατηρήσουμε, ότι το πρόσημό της, εξαρτάται αποκλειστικά από τον παράγοντα $(x-1)$. Έτσι, για x διαφορετικό των ριζών της f'' , δηλαδή για $x \neq 0$ και $x \neq 1$, έχουμε ότι: αν $x > 1$, τότε $x-1 > 0$, και αφού $60x^2 > 0$, $60x^2(x-1) > 0$, δηλαδή $f''(x) > 0$, ενώ αν $x < 1$, τότε $x-1 < 0$ και $60x^2(x-1) < 0$, δηλαδή $f''(x) < 0$.

(2) Χρησιμοποιήσαμε το (iii), από το Θεώρημα της σελίδας 144.

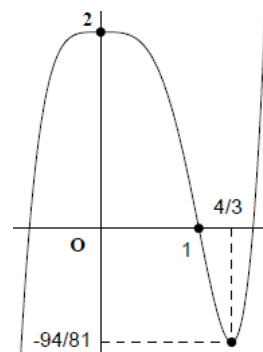
(3) Πριν περάσουμε σε μια ολοκληρωμένη μελέτη συνάρτησης, θα δούμε, ανεξάρτητα: (α) τη μελέτη μονοτονίας και ακροτάτων, (β) τη μελέτη κυρτών, κοίλων και σημείων καμπής, και στη συνέχεια τον συνδυασμό των δύο ανεξάρτητων μελετών.

$$f'(x) = 15x^4 - 20x^3 = 5x^3(3x-4) = 0 \Leftrightarrow \left\{x=0 \text{ ή } x=\frac{4}{3}\right\}$$

x	$-\infty$	0	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$				

Στο σχήμα φαίνεται το T.M. της f , που είναι το $f(0) = 2$, και το T.E., που είναι το $f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{94}{81}$.

x	$-\infty$	0	1	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					



Όταν θα κάνουμε ολοκληρωμένη μελέτη συνάρτησης, θα φροντίσουμε ο «άξονας των x », του πίνακα, να «ευθυγραμμίζεται» με αυτόν της C_f .

B5: Έστω f μια συνάρτηση, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$, για την οποία ισχύει: $f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.

Λύση: Προφανώς, αφού η f είναι **δυο φορές παραγωγίσιμη** στο $(-2,2)$, για να έχει η f **θέσεις σημείων καμπής** στο $(-2,2)$, «πρέπει και αρκεί» η συνάρτηση f'' , να έχει ρίζες στο $(-2,2)$.

Επειδή όταν δυο συναρτήσεις είναι ίσες και παραγωγίσιμες, τότε και οι παράγωγοί τους είναι ίσες:

$$\begin{aligned} f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0 &\Rightarrow (f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3)' = (0)' \Rightarrow 2f(x) \cdot f'(x) - 2f'(x) + 2x = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(x) \cdot f'(x) - f'(x) + x = 0 \Rightarrow (f(x) \cdot f'(x) - f'(x) + x)' = (0)' \Rightarrow \\ &\Rightarrow f'(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot f''(x) - f''(x) + 1 = 0 \Rightarrow [f'(x)]^2 + 1 + f''(x)[f(x) - 1] = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει, ότι αν υπήρχε $x_0 \in (-2,2)$, με $f''(x_0) = 0$, τότε $[f'(x_0)]^2 + 1 = 0$, που είναι προφανώς ΑΤΟΠΟ, επομένως η f'' δεν έχει ρίζες, και συνεπώς η f δεν έχει σημεία καμπής.

Σχόλια: (1) Για κάθε $x_0 \in (-2,2)$, έχουμε ότι $[f'(x_0)]^2 \geq 0 \Rightarrow [f'(x_0)]^2 + 1 \geq 1 > 0$.

(2) Η σχέση $f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow f^2(x) - 2f(x) = -x^2 + 3$, είναι μια σχέση συναρτήσεων, όπου για την άγνωστη f έχουμε την πληροφορία ότι είναι **δυο φορές παραγωγίσιμη** στο $(-2,2)$, και για την $g(x) = -x^2 + 3$ γνωρίζουμε ότι είναι **δυο φορές παραγωγίσιμη** στο $\mathbb{R}$, ως **πολυωνυμική**.

- Επειδή $f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow f^2(x) - 2f(x) + 1 = 4 - x^2 \Leftrightarrow [f(x) - 1]^2 = 4 - x^2$, για να ορίζεται η f , «πρέπει και αρκεί» $4 - x^2 \geq 0$, δηλαδή $-2 \leq x \leq 2$.

- a) Επειδή $f(x) - 1 = \pm \sqrt{4 - x^2}$, δηλαδή $f(x) = 1 \pm \sqrt{4 - x^2}$, για κάθε $x \in [-2,2]$, αν πάρουμε υπόψη μας μόνο αυτή τη δυνατότητα, θα πούμε ότι υπάρχει άπειρο πλήθος συναρτήσεων με αυτά τα χαρακτηριστικά, αφού κάθε $x_0 \in [-2,2]$ μπορεί να «επιλέξει» για τιμή της f στο x_0 , ή την $f(x_0) = 1 + \sqrt{4 - x_0^2}$ ή την $f(x_0) = 1 - \sqrt{4 - x_0^2}$.

- b) Αν πάρουμε σαν δεδομένο, ότι η f είναι **δυο φορές παραγωγίσιμη** στο $(-2,2)$, και επομένως **συνεχής** στο $(-2,2)$, για να υπάρχει «κλαδική» συνάρτηση με κλάδους $1 + \sqrt{4 - x^2}$, $1 - \sqrt{4 - x^2}$ πρέπει να υπάρχει «οριακό σημείο» $x_0 \in (-2,2)$, δηλαδή σημείο «αλλαγής κλάδου»,

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \text{ δηλαδή } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \sqrt{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} (-\sqrt{4 - x^2}).$$

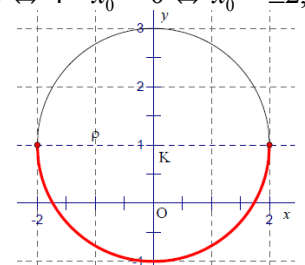
Για παράδειγμα, σε μια από τις πιο απλές περιπτώσεις, για να υπάρχει η $f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{4 - x^2}, & \text{αν } x < x_0 \\ 1 + \sqrt{4 - x^2}, & \text{αν } x \geq x_0 \end{cases}$, πρέπει $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, δηλαδή $\lim_{x \rightarrow x_0^-} (1 - \sqrt{4 - x^2}) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} (1 + \sqrt{4 - x^2})$.

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow x_0^-} (1 + \sqrt{4 - x^2}) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} (1 - \sqrt{4 - x^2}) \Leftrightarrow \sqrt{4 - x_0^2} = -\sqrt{4 - x_0^2} \Leftrightarrow 2\sqrt{4 - x_0^2} = 0 \Leftrightarrow 4 - x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2,$$

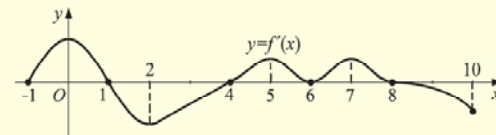
και επομένως λύσεις του προβλήματος, για τον τύπο συνεχούς συνάρτησης f ,

$$\text{είναι μόνο δύο: } f(x) = 1 + \sqrt{4 - x^2}, D_f = [-2,2] \text{ ή } f(x) = 1 - \sqrt{4 - x^2}, D_f = [-2,2]$$

όπου γραφικές παραστάσεις είναι τα ημικύκλια στα οποία χωρίζεται κύκλος κέντρου $K(0,1)$ και ακτίνας $\rho = 2$, από την ευθεία $y = 1$.



Α4: Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f , στο διάστημα $[-1,10]$. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής.



Λύση: Προφανώς, η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[-1,10]$.

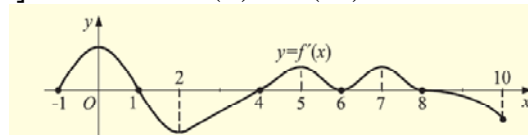
x	-1	1	4	6	8	10			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$	T.E. T.M.	T.E. T.M.	T.E. T.M.	T.E. T.M.	T.E. T.M.	T.E. T.M.	T.E. T.M.		

Όπου η γραφική παράσταση της f' είναι πάνω από τον άξονα των x , εκεί έχουμε $f'(x) > 0$, και όπου η

γραφική παράσταση της f' είναι κάτω από τον άξονα των x , εκεί έχουμε $f'(x) < 0$. Έτσι έχουμε $f'(x) > 0$, στο διάστημα $(-1,1)$, και επειδή η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$, επομένως η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $[-1,1]$. Επίσης η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $[4,8]$, αφού η f είναι συνεχής στο $[4,8]$, και η f' διατηρεί **θετικό πρόσημο** στο $(4,6) \cup (6,8)$. Ομοίως η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στα $[1,4]$ και $[8,10]$, αφού είναι συνεχής σε αυτά, και η f' έχει **αρνητικό πρόσημο** στο εσωτερικό τους.

• Στο $x_1 = 1$, η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο**, το $f(1)$, αφού η f είναι συνεχής στο $(-1,4)$, με $f'(x) > 0$ στο $(-1,1)$, και $f'(x) < 0$ στο $(1,4)$. Ομοίως στο $x_2 = 8$, η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο**, το $f(8)$, αφού η f είναι συνεχής στο $(6,10)$, με $f'(x) > 0$ στο $(6,8)$, και $f'(x) < 0$ στο $(8,10)$.

• Στο $x_3 = 4$, η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο**, το $f(4)$, αφού η f είναι συνεχής στο $(1,6)$, με $f'(x) < 0$ στο $(1,4)$, και $f'(x) > 0$ στο $(4,6)$. Στο $x_4 = -1$, η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο**, το $f(-1)$, αφού $f \nearrow$ στο $[-1,1]$, όπου για κάθε $x \in [-1,1]$, $x \geq -1 \Rightarrow f(x) \geq f(-1)$ και επομένως $f(x) \geq f(-1)$, για κάθε $x \in D_f \cap (-3,1)$. Ομοίως, στο $x_5 = 10$, η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο**, το $f(10)$, αφού $f \searrow$ στο $[8,10]$, όπου για κάθε $x \in [8,10]$, $x \leq 10 \Rightarrow f(x) \geq f(10)$ και επομένως $f(x) \geq f(10)$, για κάθε $x \in D_f \cap (8,12)$.



➤ **Προφανώς**, η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[-1,0]$,

$[0,2]$, $[2,5]$, $[5,6]$, $[6,7]$ και $[7,10]$, αφού είναι

συνεχής στο $[-1,10]$, ως παραγωγίσιμη στο $[-1,10]$.

Έτσι, αφού η f' , είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,0)$,

και η f είναι συνεχής στο $[-1,0]$, επομένως η f είναι **κυρτή** στο $[-1,0]$.

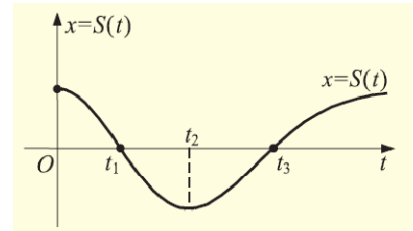
x	-1	0	2	5	6	7	10
$f'(x)$							
$f(x)$		Σ.Κ.	Σ.Κ.	Σ.Κ.	Σ.Κ.	Σ.Κ.	

Ομοίως, ισχύουν τα επόμενα: $f \nearrow^{f \text{ συνεχής}}(2,5) \Rightarrow \{f \text{ κυρτή στο } [2,5]\}$, $f \nearrow^{f \text{ συνεχής}}(6,7) \Rightarrow \{f \text{ κυρτή στο } [6,7]\}$, $f \searrow^{f \text{ συνεχής}}(5,6) \Rightarrow \{f \text{ κοίλη στο } [5,6]\}$ και $f \searrow^{f \text{ συνεχής}}(7,10) \Rightarrow \{f \text{ κοίλη στο } [7,10]\}$.

➤ Επίσης, το σημείο $A(0, f(0))$ είναι **σημείο καμπής** της C_f , αφού υπάρχει εφαπτομένη της C_f σε αυτό, με κλίση $f'(0)$, και η f είναι κυρτή στο $(-1,0)$ και κοίλη στο $(0,2)$. Ομοίως, **σημεία καμπής** της C_f , είναι τα σημεία $B(2, f(2))$, $\Gamma(5, f(5))$, $\Delta(6, f(6))$ και $E(7, f(7))$.

Σχόλιο: Η άσκηση αυτή, δεν διακρίνεται για την αυστηρότητά της, αφού στηρίζεται στο «φαίνεται», όμως προσφέρεται για την εξάσκηση μας, πάνω στους σχετικούς ορισμούς.

A5: Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_S της συνάρτησης θέσεως $x = S(t)$ ενός κινητού που κινείται πάνω σε έναν άξονα. Αν η C_S παρουσιάζει καμπή τις χρονικές στιγμές t_1 και t_3 , να βρείτε: (i) Πότε το κινητό κινείται κατά τη θετική φορά και πότε κατά την αρνητική φορά.



(ii) Πότε η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται και πότε μειώνεται.

Λύση: Θα λύσουμε, κάνοντας «υποθέσεις εργασίας», αφού θεωρούμε ότι τα δεδομένα, δεν έχουν κατατεθεί με την αναγκαία αυστηρότητα.

(1) Θεωρούμε τη συνάρτηση $x(t) = S(t)$, δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, +\infty)$.

(2) Θεωρούμε ότι τα t_1 και t_3 , είναι οι μοναδικές θέσεις **σημείων καμπής**, με συνεχή την $x''(t) = a(t)$.

(3) Θεωρούμε ότι η πρώτη παράγωγος $x'(t) = v(t)$, μηδενίζεται μόνο στις χρονικές στιγμές $t_1 = 0$ και t_2 , όπου η συνάρτηση θέσης παρουσιάζει τα μοναδικά της τοπικά ακρότατα.

(4) Θεωρούμε ότι η συνάρτηση θέσης είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[t_3, +\infty)$.

(i) Το κινητό κινείται κατά τη **θετική φορά**, δηλαδή προς τα **δεξιά**, στα χρονικά διαστήματα στα οποία η συνάρτηση θέσης είναι **γνησίως αύξουσα**, κάτι που στην περίπτωση μας προφανώς συμβαίνει μόνο στο χρονικό διάστημα $[t_2, +\infty)$.

Το κινητό κινείται κατά την **αρνητική φορά**, δηλαδή τα **αριστερά**, όταν η συνάρτηση θέσης είναι **γνησίως φθίνουσα**, και αυτό προφανώς συμβαίνει μόνο στο χρονικό διάστημα $[0, t_2]$.

(ii) Η ευθύγραμμη κίνηση ενός κινητού λέγεται **επιταχυνόμενη** (αντιστοίχως **επιβραδυνόμενη**), όταν το μέτρο της ταχύτητας $v(t)$, δηλαδή η $|v(t)|$, **αυξάνεται** (αντιστοίχως **μειώνεται**). Έτσι, η ταχύτητα του κινητού **αυξάνεται** όταν **το μέτρο της αυξάνεται**, και **μειώνεται**, όταν **το μέτρο της μειώνεται**. Προφανώς, η κίνηση είναι **επιταχυνόμενη** όταν $v(t) \cdot a(t) > 0$, δηλαδή όταν ταχύτητα και επιτάχυνση έχουν την **ίδια «κατεύθυνση»**, και **επιβραδυνόμενη** όταν $v(t) \cdot a(t) < 0$, δηλαδή όταν ταχύτητα και επιτάχυνση έχουν **αντίθετη «κατεύθυνση»**.

Έτσι, η κίνηση είναι **επιταχυνόμενη** στα διαστήματα $[0, t_1]$ και $[t_2, t_3]$,

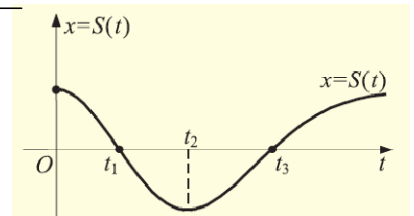
ενώ είναι **επιβραδυνόμενη** στα διαστήματα $[t_1, t_2]$ και $[t_3, +\infty)$.

Στο διάστημα $(0, t_2)$ όπου η γραφική παράσταση «**κατέρχεται**»,

η συνάρτηση θέσης είναι **γνησίως φθίνουσα**, και επομένως η πρώτη παράγωγος που είναι συνεχής, αφού η $x(t)$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, διατηρεί **σταθερά αρνητικό πρόσημο**, ανάμεσα στις διαδοχικές της ρίζες, δηλαδή $x'(t) = v(t) < 0$.

Στο διάστημα $(t_2, +\infty)$, όπου η γραφική παράσταση «**ανέρχεται**», η $x(t)$ είναι **γνησίως αύξουσα**, και επομένως η πρώτη παράγωγος που είναι συνεχής, αφού η $x(t)$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, διατηρεί **σταθερά θετικό πρόσημο**, μετά την μεγαλύτερή της ρίζα, δηλαδή $x'(t) = v(t) > 0$.

Η δεύτερη παράγωγος, δηλαδή η $x''(t) = v'(t) = a(t)$, είναι συνεχής, με μοναδικές ρίζες τα t_1 και t_3 , και επομένως στα διαστήματα $(0, t_1)$ και $(t_3, +\infty)$, που η $x(t)$ είναι **κοίλη**, θα έχουμε $a(t) < 0$, ενώ στο διάστημα (t_1, t_3) , που η $x(t)$ είναι **κυρτή**, θα έχουμε $a(t) > 0$.



t	0	t_1	t_2	t_3	$+\infty$		
$v(t)$	0	-	-	0	+	+	
$a(t)$		-	0	+	+	0	-
$ v(t) $	0	$\nearrow$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\searrow$	