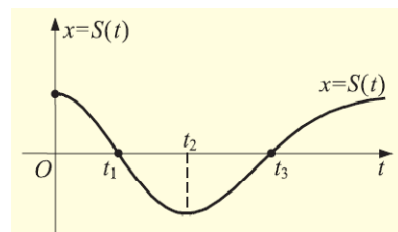


A5: Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_S της συνάρτησης θέσεως $x = S(t)$ ενός κινητού που κινείται πάνω σε έναν άξονα. Αν η C_S παρουσιάζει καμπή τις χρονικές στιγμές t_1 και t_3 , να βρείτε: (i) Πότε το κινητό κινείται κατά τη θετική φορά και πότε κατά την αρνητική φορά.



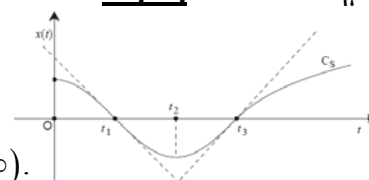
(ii) Πότε η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται και πότε μειώνεται.

Λύση: (1) Η C_S «φαίνεται» σαν μονοκονδυλιά, από αριστερά προς τα δεξιά, με αριστερό άκρο, το κοινό της σημείο με τον «άξονα των $x(t)$ », χωρίς να καταγράφεται δεξιό άκρο. Έτσι, θα πρέπει να θεωρηθεί δεδομένο, ότι η συνάρτηση $x(t) = S(t)$ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, και αφού δεν δηλώνεται τίποτα για τη συμπεριφορά της στο διάστημα $[t_3, +\infty)$, θα πρέπει να θεωρήσουμε ότι αυτό που «φαίνεται», περιγράφει με απόλυτη ακρίβεια τη συνέχεια που δεν φαίνεται, δηλαδή ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και «κοίλη» στο $[t_3, +\infty)$, χωρίς ασύμπτωτες.

(2) Η C_S «φαίνεται» παντού «λεία», δηλαδή σε κάθε σημείο της, «φαίνεται» να υπάρχει η δυνατότητα σχεδίασης εφαπτομένης, και αφού πουθενά δεν «φαίνεται» να υπάρχει υποψία για κατακόρυφη εφαπτομένη, επομένως η συνάρτηση $x(t) = S(t)$, μπορεί να θεωρηθεί παραγωγίσιμη.

Μάλιστα μπορεί να θεωρηθεί προφανές, ότι $x'(t_1) = v(t_1) < 0$ και $x'(t_3) = v(t_3) > 0$.

(3) Το δεδομένο ότι «η C_S παρουσιάζει καμπή τις χρονικές στιγμές t_1 και t_3 », μέσω του ορισμού επιβεβαιώνει, ότι η $x(t) = S(t)$ είναι παραγωγίσιμη σε διαστήματα που βρίσκονται εκατέρωθεν των t_1 και t_3 , στα οποία είναι κοίλη – κυρτή (κυρτή – κοίλη), και επιπλέον ότι η C_S έχει εφαπτόμενες στα αντίστοιχα σημεία $T_1(t_1, 0)$ και $T_3(t_3, 0)$. Τα προαναφερθέντα, με τη βοήθεια του σχήματος, προφανώς μας δίνουν το δικαίωμα, να θεωρήσουμε δεδομένο, ότι η $x(t) = S(t)$ είναι κυρτή στο διάστημα $[t_1, t_3]$, και κοίλη στα διαστήματα $[0, t_1]$ και $[t_3, +\infty)$.



(4) Τέλος, είναι «εμφανές», ότι η συνάρτηση θέσης $x(t) = S(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, t_2]$, και γνησίως αύξουσα στο $[t_2, +\infty)$.

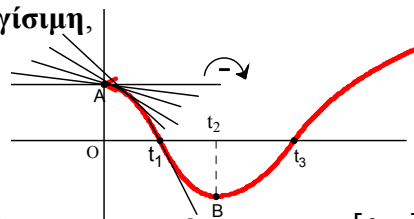
(i) Το κινητό κινείται κατά τη θετική φορά, δηλαδή προς τα δεξιά, στα χρονικά διαστήματα στα οποία η συνάρτηση θέσης είναι γνησίως αύξουσα, κάτι που στην περίπτωση μας προφανώς συμβαίνει μόνο στο χρονικό διάστημα $[t_2, +\infty)$, όπου $v(t) \geq 0$, σύμφωνα με το σχόλιο της σελίδας 92.

Το κινητό κινείται κατά την αρνητική φορά, δηλαδή προς τα αριστερά, όταν η συνάρτηση θέσης είναι γνησίως φθίνουσα, και αυτό προφανώς συμβαίνει μόνο στο χρονικό διάστημα $[0, t_2]$, όπου $v(t) \leq 0$.

(ii) Η ευθύγραμμη κίνηση ενός κινητού λέγεται επιταχυνόμενη (αντιστοίχως επιβραδυνόμενη), όταν το μέτρο της ταχύτητας $v(t)$, δηλαδή η $|v(t)|$, αυξάνεται (αντιστοίχως μειώνεται). Έτσι, η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται όταν το μέτρο της αυξάνεται, και μειώνεται, όταν το μέτρο της μειώνεται. Όταν το κινητό κινείται κατά τη θετική φορά, δηλαδή προς τα δεξιά, τότε για κάθε χρονική στιγμή t_0 , έχουμε $v(t_0) \geq 0$, και επομένως $v(t_0) = |v(t_0)|$. Αντίστοιχα, όταν το κινητό κινείται κατά την αρνητική φορά, δηλαδή προς τα αριστερά, τότε για κάθε χρονική στιγμή t_0 : $v(t_0) \leq 0$, και $-v(t_0) = |v(t_0)|$.

► Το κριτήριο που προτείνεται: $v(t) \cdot a(t) \geq 0$ για την επιταχυνόμενη, και $v(t) \cdot a(t) \leq 0$ για την επιβραδυνόμενη, προϋποθέτει την ύπαρξη δεύτερης παραγώγου στα αντίστοιχα διαστήματα.

• Στο διάστημα $[0, t_1]$ η συνάρτηση θέσης $x(t) = S(t)$ είναι **παραγωγίσιμη**, και αφού το κινητό κινείται προς τα **αριστερά**, επομένως $v(t) \leq 0$, για κάθε $t \in [0, t_1]$. Στο ίδιο διάστημα, η $x(t) = S(t)$ είναι **κοίλη**, και επομένως η πρώτη παράγωγός της, $x'(t) = v(t)$, βάσει ορισμού είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(0, t_1)$, και επειδή η $x(t) = S(t)$ είναι **παραγωγίσιμη**, στο $[0, t_1]$, επομένως η $x'(t) = v(t)$, είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $[0, t_1]$, κάτι που επιβεβαιώνεται στο παραπάνω σχήμα, όπου καθώς το t αυξάνεται, η εφαπτομένη της C_S «**στρέφεται κατά την αρνητική φορά**», από την εφαπτομένη της C_S στο σημείο $A(0, x(0))$, μέχρι την εφαπτομένη στο σημείο $T_1(t_1, 0)$.



Έτσι, για κάθε $x_1, x_2 \in [0, t_1]$, με $x_1 < x_2$, θα έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow v(x_1) > v(x_2) \Rightarrow -v(x_1) < -v(x_2) \Rightarrow |v(x_1)| < |v(x_2)|, \text{ δηλαδή } |v| \nearrow [0, t_1].$$

• Στο διάστημα $[t_1, t_2]$ η συνάρτηση θέσης $x(t) = S(t)$ είναι **παραγωγίσιμη**, και αφού το κινητό κινείται προς τα **αριστερά**, επομένως $v(t) \leq 0$, για κάθε $t \in [t_1, t_2]$.

Στο ίδιο διάστημα η $x(t) = S(t)$ είναι **κυρτή**, και επομένως η πρώτη παράγωγός της, $x'(t) = v(t)$, βάσει ορισμού είναι **γνησίως αύξουσα** στο $[t_1, t_2]$, ομοίως με την πρώτη περίπτωση.

Έτσι, για κάθε $x_1, x_2 \in [t_1, t_2]$, με $x_1 < x_2$, θα έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow v(x_1) < v(x_2) \Rightarrow -v(x_1) > -v(x_2) \Rightarrow |v(x_1)| > |v(x_2)|, \text{ δηλαδή } |v| \searrow [t_1, t_2].$$

• Στο διάστημα $[t_2, t_3]$ η συνάρτηση θέσης $x(t) = S(t)$ είναι **παραγωγίσιμη**, και αφού το κινητό κινείται προς τα **δεξιά**, επομένως $v(t) \geq 0$, για κάθε $t \in [t_2, t_3]$.

Στο ίδιο διάστημα η $x(t) = S(t)$ είναι **κυρτή**, και επομένως η πρώτη παράγωγός της, $x'(t) = v(t)$, βάσει ορισμού είναι **γνησίως αύξουσα** στο $[t_2, t_3]$, ομοίως με την πρώτη περίπτωση.

Έτσι, για κάθε $x_1, x_2 \in [t_2, t_3]$, με $x_1 < x_2$, θα έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow v(x_1) < v(x_2) \Rightarrow |v(x_1)| < |v(x_2)|, \text{ δηλαδή } |v| \nearrow [t_2, t_3].$$

• Στο διάστημα $[t_3, +\infty)$ η συνάρτηση θέσης $x(t) = S(t)$ είναι **παραγωγίσιμη**, και αφού το κινητό κινείται προς τα **δεξιά**, επομένως $v(t) \geq 0$, για κάθε $t \in [t_3, +\infty)$.

Στο ίδιο διάστημα η $x(t) = S(t)$ είναι **κοίλη**, και επομένως η πρώτη παράγωγός της, $x'(t) = v(t)$, βάσει ορισμού είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $[t_3, +\infty)$, ομοίως με την πρώτη περίπτωση.

Έτσι, για κάθε $x_1, x_2 \in [t_3, +\infty)$, με $x_1 < x_2$, θα έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow v(x_1) > v(x_2) \Rightarrow |v(x_1)| > |v(x_2)|, \text{ δηλαδή } |v| \searrow [t_3, +\infty).$$

Έτσι, η κίνηση είναι **επιταχυνόμενη** στα διαστήματα $[0, t_1]$ και $[t_2, t_3]$,

ενώ είναι **επιβραδυνόμενη** στα διαστήματα $[t_1, t_2]$ και $[t_3, +\infty)$.

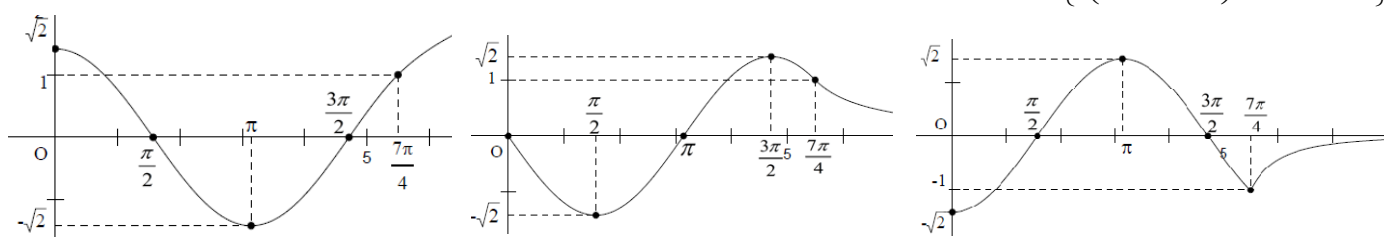
Σχόλια: (α) Αποδείχθηκε η μονοτονία του μέτρου της ταχύτητας $v(t)$ στα ανοικτά διαστήματα, και η επέκτασή της στα αντίστοιχα κλειστά, που **δεν υποστηρίζονταν άμεσα** από τους Ορισμούς και τα Θεωρήματα του σχολικού βιβλίου, στηρίχθηκε στο εισαγωγικό «σημείωμα» (σελίδα 155), πριν τον ορισμό για τα «**κοίλα – κυρτά**» μιας συνάρτησης. Στο «σημείωμα» αυτό, δόθηκε ένας «Γεωμετρικός Ορισμός», όπου κριτήριο για το αν μια συνάρτηση είναι **κοίλη** ή **κυρτή** σε ένα διάστημα Δ , είναι το **κατά πια φορά στρέφεται η εφαπτομένη** της γραφικής παράστασης, όταν το x παίρνει όλο και μεγαλύτερες τιμές στο διάστημα Δ . Αυτό, για να «**μεταφραστεί**» σε αλγεβρική σχέση, και επομένως να

γίνει διαχειρίσιμο από την «Ανάλυση», θα έπρεπε αντί για το **πώς στρέφεται η εφαπτομένη**, να καταγράφεται η **μονοτονία της παραγώγου**. Προφανώς, για να γίνει αυτή η «αντικατάσταση», θα έπρεπε να οι εφαπτόμενες να μην είναι **κατακόρυφες**, αφού αυτές ως γνωστό **δεν έχουν κλίση**, και επομένως στην τετμημένη του σημείου επαφής τους με την γραφική παράσταση, η συνάρτηση δεν παραγωγίζεται. Έτσι, επειδή τα μόνα σημεία ενός **κυρτού** ή ενός **κοίλου** τμήματος μιας γραφικής παράστασης, που μπορούν να μας «βάλουν σε μελάδες» με κατακόρυφες εφαπτόμενες, είναι τα άκρα του, έχουμε έναν επιπλέον λόγο να τα αποφύγουμε, εκτός από τον προφανή λόγο της «οικονομίας», και μάλιστα χωρίς απώλειες, αφού για τα άκρα φροντίζει η **συνέχεια** της συνάρτησης. Προφανώς, η ύπαρξη «ημιαφαπτόμενων» με κλίση, στα άκρα των διαστημάτων, είναι «καλοδεχούμενη», αφού μας δίνει το δικαίωμα να επεκτείνουμε τη μονοτονία της παραγώγου, σε ολόκληρα τα διαστήματα.

(b) Η παραπάνω λύση, παρέκαμψε την προτροπή των οδηγιών: να «**μελετηθούν μόνο συναρτήσεις που είναι τουλάχιστον δύο φορές παραγωγίσιμες στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού τους**», και δεν χρησιμοποίησε σαν βασικό «εργαλείο» διαπίστωσης **επιταχυνόμενης – επιβραδυνόμενης κίνησης**, το πρόσρημο του « $v(t) \cdot a(t)$ », αφού όπως θα δούμε παρακάτω, οι προϋποθέσεις δεν είναι εξασφαλισμένες.

(c) Μπορούμε να δούμε τρία παραδείγματα συναρτήσεων, με τα χαρακτηριστικά της άσκησης Α5.

$$(1) \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt{2} \cdot \sin x, & 0 \leq x \leq \frac{7\pi}{4} \\ \ln\left(x+1-\frac{7\pi}{4}\right)+1, & x > \frac{7\pi}{4} \end{cases}, \quad g'(x) = \begin{cases} -\sqrt{2} \cdot \eta\mu x, & 0 \leq x \leq \frac{7\pi}{4} \\ \frac{1}{x+1-\frac{7\pi}{4}}, & x > \frac{7\pi}{4} \end{cases}, \quad g''(x) = \begin{cases} -\sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x, & 0 \leq x \leq \frac{7\pi}{4} \\ \frac{-1}{\left(x+1-\frac{7\pi}{4}\right)^2}, & x > \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$



Εδώ, η συνάρτηση g είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, όπου και η g'' , είναι συνεχής.

Κατ' αντιστοιχία με την άσκηση Α5: $t_1 = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = \pi$ και $t_3 = \frac{3\pi}{2}$,

και $g(x) = x(t)$, $g'(x) = x'(t) = v(t)$, $g''(x) = x''(t) = a(t)$.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε, ότι στα διαστήματα που η κίνηση είναι **επιταχυνόμενη**, δηλαδή στα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, ισχύει η

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$+\infty$
$v(t)$	0	-	0	+	+
$a(t)$	+	-	0	+	-
$ v(t) $	0 ↗	↘	0 ↗	↘	

σχέση $v(t) \cdot a(t) \geq 0$, ενώ εκεί που η κίνηση είναι **επιβραδυνόμενη**, δηλαδή στα $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ και $\left[\frac{3\pi}{2}, +\infty\right)$,

ισχύει η σχέση $v(t) \cdot a(t) \leq 0$. Προφανώς, η διατύπωση αυτών των σχέσεων, προϋποθέτει ότι οι

συναρτήσεις μας είναι «**τουλάχιστον δύο φορές παραγωγίσιμες στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού τους**», και η ισότητα με το μηδέν, αφορά μεμονωμένα σημεία, που είναι «κλειστά» άκρα διαστημάτων.

Σε τέτοιες συναρτήσεις κίνησης, αν $v(t) \cdot a(t) \geq 0$, σε διάστημα Δ , τότε η κίνηση είναι **επιταχυνόμενη**

στο Δ , αν $v(t) \cdot a(t) \leq 0$, σε διάστημα Δ , τότε η κίνηση είναι

επιβραδυνόμενη στο Δ . Στον διπλανό πίνακα, μπορούμε να

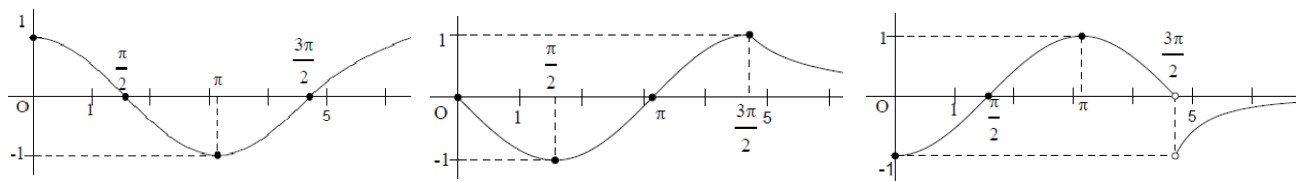
παρατηρήσουμε, ότι σε **αρνητικές** τιμές ταχύτητας, πρέπει

να σκεπτόμαστε «**αντίθετα**», αφού γνησίως φθίνουσα $v(t)$,

δηλώνει όλο και μικρότερες αρνητικές τιμές, που όμως έχουν όλο και μεγαλύτερο μέτρο.

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$+\infty$
πρ. $a(t)$	+	-	0	+	-
$v(t)$	0 ↘	↗	0 ↗	↘	
πρ. $v(t)$	0	-	0	+	+
$ v(t) $	0 ↗	↘	0 ↗	↘	

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \\ \ln\left(x+1-\frac{3\pi}{2}\right), & x > \frac{3\pi}{2} \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} -\eta\mu x, & 0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \\ \frac{1}{x+1-\frac{3\pi}{2}}, & x > \frac{3\pi}{2} \end{cases}, \quad f''(x) = \begin{cases} -\sigma\upsilon\nu x, & 0 \leq x < \frac{3\pi}{2} \\ \frac{-1}{\left(x+1-\frac{3\pi}{2}\right)^2}, & x > \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

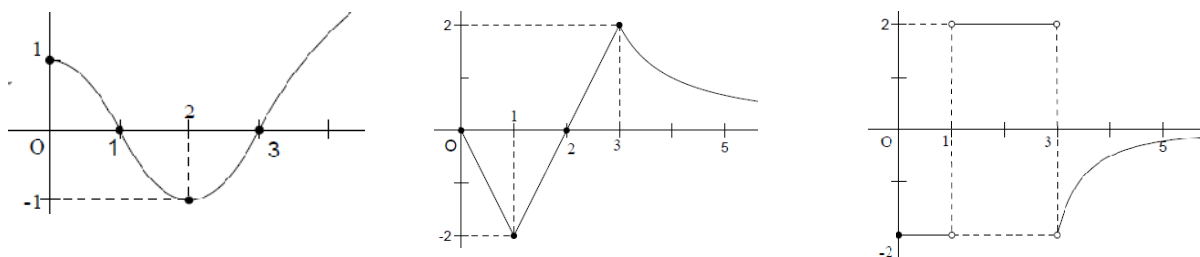


Εδώ, η συνάρτηση f είναι **μια φορά παραγωγίσιμη** στο $[0, +\infty)$, αφού η f' , ενώ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = \frac{3\pi}{2}$, και έτσι η f'' , έχει $D_{f''} = \left[0, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, +\infty\right)$.

Κατ' αντιστοιχία με την άσκηση: $t_1 = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = \pi$ και $t_3 = \frac{3\pi}{2}$.

Προφανώς, σε αυτήν την περίπτωση, δεν μπορούμε να επικαλεστούμε τη σχέση που έχει με το μηδέν η παράσταση « $v(t) \cdot \alpha(t)$ », στο $\left[\frac{3\pi}{2}, +\infty\right)$, αφού δεν ορίζεται η $\alpha(t)$ στο $\frac{3\pi}{2}$.

$$(3) \quad h(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 3, & 1 < x \leq 3 \\ 2 \cdot \ln(x-2), & 3 < x \end{cases}, \quad h'(x) = \begin{cases} -2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - 4, & 1 < x \leq 3 \\ \frac{2}{x-2}, & 3 < x \end{cases}, \quad h''(x) = \begin{cases} -2, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & 1 < x < 3 \\ \frac{-2}{(x-2)^2}, & 3 < x \end{cases}$$



Εδώ, η συνάρτηση h είναι **μια φορά παραγωγίσιμη** στο $[0, +\infty)$, αφού η h' , ενώ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, δεν είναι παραγωγίσιμη στα $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$, και έτσι η h'' , έχει πεδίο ορισμού, το σύνολο $D_{h''} = [0, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$. Κατ' αντιστοιχία με την άσκηση Α5: $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ και $t_3 = 3$.

Προφανώς, και σε αυτήν την περίπτωση, δεν μπορούμε να επικαλεστούμε τη σχέση που έχει με το μηδέν η παράσταση « $v(t) \cdot \alpha(t)$ », στα $[0, 1]$, $[1, 3]$ και $[3, +\infty)$, αφού δεν ορίζεται η $\alpha(t)$ στα 1, 3.

Στον διπλανό πίνακα, για $v(t) = h'(t)$ και $\alpha(t) = h''(t)$,

έχουμε **συμπεράσματα μονοτονίας** για την $|v(t)|$ στα ανοικτά διαστήματα, που λόγω συνέχειας της $S(t) = h(t)$, επεκτείνονται στα αντίστοιχα διαστήματα με τα «κλειστά» άκρα.

Θα πρέπει να θεωρηθεί προφανές, ότι κάθε νέος κλάδος της συνάρτησης, μπορεί να διατηρήσει το γνωστό σχήμα για την C_S , αλλά δύναται να προσθέσει νέα σημεία στα οποία να μην ορίζεται η $\alpha(t)$.

t	0	1	2	3	$+\infty$
$v(t)$	0	-	-	0	+
$\alpha(t)$		-		+	
$ v(t) $	0 ↗	↘	0 ↗	↘	