

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ – ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\eta \mu x}, \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{\eta \mu^2 x}, \quad (iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x}.$$

Λύση: (i) Παρατηρώντας ότι $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \eta \mu x = \eta \mu 0 = 0$,

διαπιστώνουμε ότι αντιμετωπίζουμε **απροσδιόριστη μορφή** $\langle \frac{0}{0} \rangle$.

$$\frac{(e^x - 1)'}{(\eta \mu x)'} = \frac{e^x}{\sigma \upsilon \nu x}, \text{ και επειδή υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\sigma \upsilon \nu x} = \frac{e^0}{\sigma \upsilon \nu 0} = 1, \text{ επομένως } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(\eta \mu x)'} = 1$$

$$\text{και συνεπώς } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\eta \mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(\eta \mu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\sigma \upsilon \nu x} = 1.$$

Σχόλιο: Η C_f , της $f(x) = \frac{e^x - 1}{\eta \mu x}$ με $D_f = (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$, δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο

$x_0 = 0$, αφού $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ και συνεπώς το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ (εννοείται και τα πλευρικά όρια) δεν είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

Αν αναζητήσουμε **κατακόρυφη ασύμπτωτη**, στις άλλες δύο πιθανές θέσεις, θα διαπιστώσουμε ότι και στο

$x_1 = -\pi$ και στο $x_2 = \pi$, η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη, αφού $\lim_{x \rightarrow -\pi^+} \frac{e^x - 1}{\eta \mu x} = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{e^x - 1}{\eta \mu x} = +\infty$.

Για $x \in (-\pi, 0)$, $-\pi < 0 \Rightarrow e^{-\pi} < e^0 = 1 \Rightarrow e^{-\pi} < 1 \Rightarrow e^{-\pi} - 1 < 0$ και επομένως $\lim_{x \rightarrow -\pi^+} (e^x - 1) = e^{-\pi} - 1 < 0$.

Επίσης $-\pi < x < 0 \Rightarrow \eta \mu x < 0$, $\lim_{x \rightarrow -\pi^+} \eta \mu x = \eta \mu(-\pi) = 0$ και επομένως $\lim_{x \rightarrow -\pi^+} \frac{1}{\eta \mu x} = -\infty$.

$$\text{Έτσι, } \lim_{x \rightarrow -\pi^+} \frac{e^x - 1}{\eta \mu x} = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} \left[(e^x - 1) \left(\frac{1}{\eta \mu x} \right) \right] \stackrel{\langle (e^{-\pi} - 1)(-\infty) \rangle}{=} +\infty.$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{\eta \mu^2 x} \stackrel{\langle \frac{0}{0} \rangle}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^x - 1)'}{(\eta \mu^2 x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{2\eta \mu x (\eta \mu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{2\eta \mu x \cdot \sigma \upsilon \nu x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^x \cdot \frac{1}{\eta \mu 2x} \right) \stackrel{\langle 1 \cdot (+\infty) \rangle}{=} +\infty.$$

Συμπλήρωμα: Εννοείται ότι η $f(x) = \frac{e^x - 1}{\eta \mu^2 x}$, ορίζεται σε διάστημα $(0, \alpha) \subseteq (0, \frac{\pi}{2})$

και επομένως $\eta \mu 2x > 0$ για $x \in (0, \alpha)$. Έτσι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \eta \mu 2x = \eta \mu 0 = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\eta \mu 2x} = +\infty$.

Εννοείται, ότι αρχικά διαπιστώσαμε την ύπαρξη απροσδιόριστης μορφής και την ύπαρξη του ορίου του «πηλίκου των παραγώγων».

Σχόλιο: (1) Αυτός ο τρόπος γραφής, είναι ο πλέον «οικονομικός».

(2) Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{\eta \mu^2 x} = +\infty$, η C_f της $f(x) = \frac{e^x - 1}{\eta \mu^2 x}$, έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη, την ευθεία $\varepsilon: x = 0$.

Επίσης $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\eta \mu^2 x} = -\infty$, και επομένως η C_f «προσεγγίζει ασυμπτωτικά» την $\varepsilon: x = 0$, «αμφίπλευρα».

(3) Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\eta \mu^2 x}$. Έτσι γίνεται προφανές, ότι όταν μας ζητάνε να **εξετάσουμε**

αν υπάρχει ένα όριο, και αντιμετωπίζουμε απροσδιόριστη μορφή, θα πρέπει να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη του ορίου «του πηλίκου των παραγώγων», προτού αρχίσουμε να γράφουμε την «αλυσίδα των ισοτήτων».

Αλλιώς, θα κάνουμε το **λάθος** που ακολουθεί. Θα γράφουμε ότι είναι **ίσα** μεταξύ τους, **ανύπαρκτα όρια**.

Λάθος: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\eta\mu^2 x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(\eta\mu^2 x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2\eta\mu x (\eta\mu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(e^x \cdot \frac{1}{\eta\mu 2x} \right) =$

Δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\eta\mu 2x}$, αφού $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\eta\mu 2x} = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\eta\mu 2x} = +\infty$.

(iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\eta\mu x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1} = \sigma\upsilon\nu 0 = 1.$

Σχόλιο: Η λύση αυτή ίσως «κατηγορηθεί για αναχρονισμό». Οι μαθητές όμως, με την «ολοκλήρωση της ύλης», μπορούν να χρησιμοποιήσουν **όλες** τις γνώσεις τους, χωρίς αυτή την αγωνία.

2. Να υπολογίσετε τα όρια: (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x}$, (ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$.

Λύση: (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot e^x) \stackrel{\langle(+\infty) \cdot (+\infty)\rangle}{=} +\infty.$

Προφανώς η $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$ ορίζεται σε κατάλληλο διάστημα, π.χ. το $(1, +\infty)$.

(ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$

Σχόλιο: Αν $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ με $D_f = (0, +\infty)$, επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, η ευθεία $y = 0$, θα είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f , «στο $+\infty$ ».

3. Να υπολογίσετε τα όρια: (i) $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln x)$, (ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \sigma\phi x)$.

Λύση: (i) $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x) \stackrel{\langle 0 \cdot (-\infty) \rangle}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$

Σχόλιο: Για $f(x) = x \cdot \ln x$ με $D_f = (0, +\infty)$, το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ υπάρχει, «**αν και μόνο αν**» υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Προφανώς, η C_f δεν έχει **κατακόρυφη ασύμπτωτη**, αφού δεν έχει, στη μοναδική πιθανή θέση, στο $x_0 = 0$.

Επίσης, επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, δεν υπάρχει για την C_f , ασύμπτωτη της μορφής $y = \lambda x + \beta$,

δηλαδή **οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη**.

Επίσης, η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} x \cdot \ln x, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής συνάρτηση. (εννοείται στο $[0, +\infty)$)

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \sigma\phi x) \stackrel{\langle 0 \cdot (+\infty) \rangle}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\varepsilon\phi x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x)'}{(\varepsilon\phi x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sigma\upsilon\nu^2 x = \sigma\upsilon\nu^2 0 = 1.$

Σχόλιο: (1) Προφανώς, η $f(x) = x \cdot \sigma\phi x$ ορίζεται στο $(0, \pi)$.

(2) Η απροσδιόριστη μορφή $\langle 0 \cdot (\pm\infty) \rangle$ μετατρέπεται σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Γενικό σχόλιο: Για κάθε περίπτωση απροσδιόριστης μορφής, λύνουμε τουλάχιστο δύο ασκήσεις με διαφορετικά αποτελέσματα, για να «δικαιωθεί» ο χαρακτηρισμός «**απροσδιόριστη**».

4. Να υπολογίσετε τα όρια: (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + \ln x - x)$, (ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \sigma\phi x \right)$.

Λύση: (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + \ln x - x) \stackrel{\langle (+\infty) - (+\infty) \rangle}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{e^x}{x} + \frac{\ln x}{x} - 1 \right) \right] \stackrel{\langle (+\infty) \cdot (+\infty) \rangle}{=} +\infty$.

Συμπλήρωμα: Αφού, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{\langle \frac{+\infty}{+\infty} \rangle}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\langle \frac{+\infty}{+\infty} \rangle}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$,

άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} + \frac{\ln x}{x} - 1 \right) \stackrel{\langle (+\infty) + 0 - 1 \rangle}{=} +\infty$.

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \sigma\phi x \right) \stackrel{\langle (+\infty) - (+\infty) \rangle}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\varepsilon\phi x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon\phi x - x}{x \cdot \varepsilon\phi x} \stackrel{\langle \frac{0}{0} \rangle}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\varepsilon\phi x - x)'}{(x \cdot \varepsilon\phi x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon\phi^2 x + 1 - 1}{\varepsilon\phi x + \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}$

$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{\frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu^2 x}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + x} \stackrel{\langle \frac{0}{0} \rangle}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\eta\mu^2 x)'}{\left(\frac{\eta\mu 2x}{2} + x \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\eta\mu 0 \cdot \sigma\upsilon\nu 0}{\sigma\upsilon\nu(2 \cdot 0) + 1} = \frac{0}{2} = 0$

5. Να υπολογίσετε τα όρια: (i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$, (ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\varepsilon\phi \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

Λύση: (i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \stackrel{\langle 0^0 \rangle}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \cdot \ln x} \stackrel{x \cdot \ln x = u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} e^u = 1$. Για $u = x \cdot \ln x$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} u = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x) = 0$ (Άσκ. 3 (i))

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\varepsilon\phi \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{\ln x}} \stackrel{\langle 0^0 \rangle}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln \left(\varepsilon\phi \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{\ln x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{\ln x} \ln \left(\varepsilon\phi \frac{x}{2} \right)} \stackrel{\frac{\ln \varepsilon\phi \frac{x}{2}}{\ln x} = u}{=} \lim_{u \rightarrow 1} e^u = e^1 = e$.

Για $u = \frac{\ln \varepsilon\phi \frac{x}{2}}{\ln x}$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} u = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \varepsilon\phi \frac{x}{2}}{\ln x} \stackrel{\langle \frac{-\infty}{-\infty} \rangle}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\ln \varepsilon\phi \frac{x}{2} \right)'}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\varepsilon\phi \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2\eta\mu \frac{x}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\eta\mu x} \stackrel{\langle \frac{0}{0} \rangle}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x)'}{(\eta\mu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 0} = \frac{1}{1} = 1$.

6. Να υπολογίσετε τα όρια: (i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\sigma\phi x}$, (ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sigma\upsilon\nu x)^{\frac{1}{x}}$.

Λύση: (i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\sigma\phi x} \stackrel{\langle 1^{+\infty} \rangle}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(1+x)^{\sigma\phi x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sigma\phi x \cdot \ln(1+x)} \stackrel{\sigma\phi x \cdot \ln(1+x) = u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} e^u = e^0 = 1$. Για $u = \sigma\phi x \cdot \ln(1+x)$:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} u = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\sigma\phi x \cdot \ln(1+x)] \stackrel{\langle (+\infty) \cdot 0 \rangle}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{\varepsilon\phi x} \stackrel{\langle \frac{0}{0} \rangle}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln(1+x))'}{(\varepsilon\phi x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2}}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sigma\upsilon\nu x)^{\frac{1}{x}} \stackrel{\langle 1^{+\infty} \rangle}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(\sigma\upsilon\nu x)^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} \cdot \ln(\sigma\upsilon\nu x)} \stackrel{\frac{1}{x} \cdot \ln(\sigma\upsilon\nu x) = u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} e^u = e^0 = 1$.

Για $u = \frac{1}{x} \cdot \ln(\sigma\upsilon\nu x)$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} u = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sigma\upsilon\nu x)}{x} \stackrel{\langle \frac{0}{0} \rangle}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln(\sigma\upsilon\nu x))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{-\eta\mu 0}{\sigma\upsilon\nu 0} = \frac{0}{1} = 0$.

7. Να υπολογίσετε τα όρια: (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$, (ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x)^{\frac{1}{x}}$.

Λύση: (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+2x)^{\frac{1}{x}} \stackrel{\langle (+\infty)^0 \rangle}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln(1+2x)^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \ln(1+2x)} = \lim_{\substack{u = \frac{1}{x} \ln(1+2x) \\ u \rightarrow 0}} e^u = e^0 = 1.$

Για $u = \frac{1}{x} \cdot \ln(1+2x)$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+2x)}{x} \stackrel{\langle \frac{+\infty}{+\infty} \rangle}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(1+2x))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1+2x} = 0.$

Σχόλιο: Για $f(x) = (1+2x)^{\frac{1}{x}}$, με $D_f = (0, +\infty)$, η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=1$, στο $+\infty$.

(ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^1 = e.$

Σχόλιο: Για $f(x) = (e^x)^{\frac{1}{x}} = e$ με $D_f = \mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=e$, στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Γενικό σχόλιο: Για συναρτήσεις της μορφής $f(x) = \lambda x + \beta$, με $D_f = \mathbb{R}$, η C_f έχει πάντα πλάγια

ή οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και στο $-\infty$, την ευθεία $y = \lambda x + \beta$, δηλαδή τον εαυτό της, αφού

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (\lambda x + \beta)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ((\lambda x + \beta) - (\lambda x + \beta)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 0 = 0 \text{ και ομοίως } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (\lambda x + \beta)) = 0.$$

Ο όρος «ασύμπτωτη», δικαιώνεται «όνομα και πράγμα», στην περίπτωση π.χ. της C_f , για $f(x) = \frac{1}{x}$ με τους δυο άξονες, αφού εκεί μπορούμε να παρατηρήσουμε μια «πορεία» προσέγγισης, χωρίς όμως σύμπτωση.

Αυτό συμβαίνει με συνέπεια, στις κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Ο ορισμός όμως, «φτιαγμένος» για να μας παρέχει τα κατάλληλα εργαλεία εύρεσης, δεν είναι δυνατό να μην αφήνει «παραθυράκια» για «εκφυλισμένες» μορφές όπως της ευθείας με τον εαυτό της.

Εξάλλου μια «πορεία» προσέγγισης, χωρίς σύμπτωση, είναι και η περίπτωση της C_f , για $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$.

Η C_f , «στο $+\infty$ » (αλλά και στο $-\infty$) ταλαντώνεται «πάνω-κάτω» από τον άξονα των x , με πλάτος ταλάντωσης συνεχώς μειούμενο, χωρίς να υπάρχει περίπτωση «μελλοντικής» σύμπτωσης. (Σχ. 53, σελ. 172)

Επίσης, στην έννοια της «ασύμπτωτη», λέξη κλειδί είναι η λέξη «τελικά»,

που σημαίνει ότι δε μας απασχολεί η C_f σε όλη της την έκταση.

Αυτό που της «ζητάμε» είναι, «όταν αποφασίσει» την πορεία προσέγγισης, να την «κρατήσει με συνέπεια».

8. Να υπολογίσετε τα όρια: (i) $\lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu x \cdot \ln x)$, (ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}+1}$.

Λύση: (i) $\boxed{1^n}$: $\lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta\mu x \cdot \ln x) \stackrel{\langle 0 \cdot (-\infty) \rangle}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \cdot x \cdot \ln x \right) \stackrel{\text{άσκ. 3(i)}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x) = 1 \cdot 0 = 0$

$\boxed{2^n}$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta\mu x \cdot \ln x) \stackrel{\langle 0 \cdot (-\infty) \rangle}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\eta\mu x}} \stackrel{\langle \frac{(-\infty)}{(+\infty)} \rangle}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\eta\mu x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\sin x}{\eta\mu^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu^2 x}{-\sin x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \cdot (-\epsilon\phi x) \right) = 1 \cdot 0 = 0$

(ii) Για $x \in (0, +\infty)$:
«Χωρίς» De L'Hospital. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}+1} \stackrel{\langle \frac{+\infty}{+\infty} \rangle}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x}} \right) = 0 \cdot 1 = 0$

Σχόλιο: Όπως έχουμε δει, αν χρησιμοποιήσουμε τους κανόνες De L'Hospital, το πρόβλημα απροσδιοριστίας δε λύνεται, απλά «ανακυκλώνεται». Στη «δεύτερη παραγωγή», βρίσκουμε τις ρίζες στην αρχική τους θέση.