

Ορισμένο Ολοκλήρωμα – Η Συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

- **Συμπλήρωμα θεωρίας:** Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις σε διάστημα $[a, b]$,

και $f(x) \leq g(x)$, για κάθε $x \in [a, b]$, τότε $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Προσοχή: Αν επιπλέον, υπάρχει $\xi \in [a, b]$, με $f(\xi) \neq g(\xi)$, τότε $\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$.

- Στην ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής, από τα «συμφραζόμενα» έχουμε: $dg(x) = g'(x) dx$.

➤ Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

Λύση 1^η: Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, με $D_f = (0, +\infty)$, είναι **συνεχής** ως πηλίκο συνεχών

συναρτήσεων. Επομένως η συνάρτηση f , είναι συνεχής στο $[1, 4] \subseteq (0, +\infty)$.

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right]_1^4 = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_1^4 = [2\sqrt{x}]_1^4 = 2 \cdot \sqrt{4} - 2 \cdot \sqrt{1} = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 4 - 2 = 2$$

Λύση 2^η: $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 \frac{2}{2\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2 \cdot [\sqrt{x}]_1^4 = 2 \cdot (\sqrt{4} - \sqrt{1}) = 2 \cdot (2 - 1) = 2 \cdot 1 = 2,$

αφού $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, στο $(0, +\infty)$.

Σχόλια: (1) Στη δεύτερη λύση δεν χρησιμοποιήσαμε τον πίνακα των παραγουσών, αφού θυμηθήκαμε «**παραγώγους μερικών βασικών συναρτήσεων**», από τις σελίδες 105 – 106.

(2) Προφανώς, $[2\sqrt{x}]_1^4 = 2 \cdot [\sqrt{x}]_1^4$, αφού ο αριθμός 2 είναι κοινός παράγοντας μειωτέου-αφαιρετέου.

(3) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \int_1^4 2 \cdot (\sqrt{x})' dx = \int_1^4 2 du = 2 \cdot (2 - 1) = 2 \cdot 1 = 2$ (εφαρμογή στη σελίδα 213)

$u = \sqrt{x}, du = (\sqrt{x})' dx$ και $u_1 = \sqrt{1} = 1, u_2 = \sqrt{4} = 2$.

➤ Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$. (σελίδα 219)

Λύση 1^η: $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \ln x \cdot (\ln x)' dx = [\ln x \cdot \ln x]_1^e - \int_1^e (\ln x)' \cdot \ln x dx$, επομένως

$I = [\ln x \cdot \ln x]_1^e - I$, δηλαδή $2 \cdot I = [(\ln x)^2]_1^e = (\ln e)^2 - (\ln 1)^2 = 1^2 - 0^2 = 1$, και συνεπώς $I = \frac{1}{2}$,

αφού $I = \int_1^e \ln x \cdot (\ln x)' dx = \int_1^e (\ln x)' \cdot \ln x dx$.

Σχόλιο: Στην «ολοκλήρωση κατά παράγοντες», το αρχικό ολοκλήρωμα, μπορεί να ξαναπαρουσιαστεί.

Λύση 2^η: $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^e 2 \ln x \cdot (\ln x)' dx = \frac{1}{2} \cdot [(\ln x)^2]_1^e = \frac{1}{2} \cdot [(\ln e)^2 - (\ln 1)^2] = \frac{1}{2}$

Για $u = \ln x$: $[(\ln x)^2]_1^e \stackrel{\ln x = u}{=} (u^2)' \stackrel{u = \ln x}{=} 2u \cdot u' = 2 \ln x \cdot (\ln x)'$

Γενικό Σχόλιο: Σε κάθε μας «βήμα», θα πρέπει να «**επιδεικνύουμε**», ότι όχι μόνο γνωρίζουμε τη Θεωρία, αλλά γνωρίζουμε και το πώς χρησιμοποιείται.

Άσκηση A3: Αν για συνάρτηση f , η f' είναι συνεχής σε διάστημα $[α,β]$, να αποδειχθεί ότι:

$$2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot f'(x) dx = (f(\beta))^2 - (f(\alpha))^2$$

Λύση: $2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot f'(x) dx = \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} 2u du = [u^2]_{f(\alpha)}^{f(\beta)} = (f(\beta))^2 - (f(\alpha))^2$

Για $u = f(x)$, έχουμε $du = f'(x)dx$, και $u_1 = f(\alpha)$, $u_2 = f(\beta)$.

Σχόλιο: Σαν εφαρμογή, προκύπτει 3^η λύση στην προηγούμενη άσκηση.

$$2I = 2 \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = 2 \int_1^e \ln x \cdot (\ln x)' dx = (\ln e)^2 - (\ln 1)^2 = 1 \Rightarrow I = \frac{1}{2}$$

Άσκηση A4: Αν η C_f της συνάρτησης f , διέρχεται από τα σημεία $A(0,0)$ και $B(1,1)$, να βρείτε την τιμή του $\int_0^1 f'(x) dx$, εφόσον η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Λύση: $\int_0^1 f'(x) dx = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = 1 - 0 = 1$, αφού $A(0,0), B(1,1) \in C_f \Rightarrow \{f(0)=0 \text{ και } f(1)=1\}$.

Σχόλιο: Αν f' συνεχής σε διάστημα $[α,β]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f'(x) dx = f(\beta) - f(\alpha)$.

Άσκηση A6: i) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

ii) Να αποδείξετε ότι: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(1 + \sqrt{2})$.

Λύση: i) $D_f = \mathbb{R}$, αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $1 > 0 \Rightarrow x^2 + 1 > x^2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} > -x \Rightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x + \sqrt{x^2 + 1})' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x^2 + 1)' \right) = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Επομένως, η συνάρτηση f , είναι μια παράγουσα της $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, στο $\mathbb{R}$.

Η $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, είναι προφανώς συνεχής στο $\mathbb{R}$, και επομένως είναι συνεχής στο $[0,1]$.

ii) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \left[\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right]_0^1 = \ln(1 + \sqrt{1^2 + 1}) - \ln(0 + \sqrt{0^2 + 1}) = \ln(1 + \sqrt{2}) - \ln 1 = \ln(1 + \sqrt{2})$.

Σχόλια: (1) Για το ολοκλήρωμα, προφανώς θα αρκούσε να «ορίζονται» οι συναρτήσεις στο $[0,1]$.

$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} > 0 \Rightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} > x \stackrel{x \in [0,1]}{\geq} 0 \Rightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$ και επομένως $[0,1] \subseteq D_f$.

(2) Αν δώσουμε στη συνάρτηση f , τη «μορφή» $f(x) = \ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|$, εύκολα γίνεται αντιληπτό, ότι αποκτάμε «εργαλείο» με ευρύτερες δυνατότητες. Έτσι, μπορούμε να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα

$\int_4^6 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} dx$ και $\int_{-6}^{-4} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} dx$, αφού διαπιστώνεται, ότι η συνάρτηση $G(x) = \ln|x + \sqrt{x^2 - 4}|$, είναι

μια παράγουσα της $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$, στα διαστήματα $(2, +\infty)$ και $(-\infty, -2)$ αντίστοιχα.

Άσκηση B7(ι): Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $\int_4^6 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} dx$.

Λύση: Αν $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$, τότε $D_f = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, αφού $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \{x < -2 \text{ ή } x > 2\}$

Έτσι, το ολοκλήρωμα «είναι καλά ορισμένο», αφού η f είναι **συνεχής** στο $[4, 6] \subseteq D_f$, σαν πηλίκο **συνεχών** συναρτήσεων: μιας πολυωνυμικής, και της τετραγωνικής ρίζας μιας άλλης πολυωνυμικής.

$$\int_4^6 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} dx = \int_4^6 \frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}} dx = \int_4^6 \frac{(x^2-4)'}{2\sqrt{x^2-4}} dx = \int_{12}^{32} \frac{1}{2\sqrt{u}} du = \left[\sqrt{u} \right]_{12}^{32} = \sqrt{32} - \sqrt{12} = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$

$$u = x^2 - 4, \quad du = (x^2 - 4)' dx \quad \text{και} \quad u_1 = 4^2 - 4 = 12, \quad u_2 = 6^2 - 4 = 32.$$

Άσκηση B8(iii): Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $\int_0^3 |x^2 - 3x + 2| dx$.

Λύση: Προφανώς, η συνάρτηση $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$, είναι **συνεχής** στο διάστημα $[0, 3]$.

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \{x = 1 \text{ ή } x = 2\}$, και επειδή ο συντελεστής του x^2 , είναι ο **θετικός** αριθμός 1, θα έχουμε: $x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow \{x < 1 \text{ ή } x > 2\}$, (θετικό τριώνυμο, δηλαδή ομόσημο του 1, «εκτός των ριζών»), και $x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$, (αρνητικό τριώνυμο, δηλαδή ετερόσημο του 1, «εντός των ριζών»).

Έτσι, $|x^2 - 3x + 2| = x^2 - 3x + 2$, αν $\{x \leq 1 \text{ ή } x \geq 2\}$, και $|x^2 - 3x + 2| = -(x^2 - 3x + 2)$, αν $1 \leq x \leq 2$.

$$\begin{aligned} \int_0^3 |x^2 - 3x + 2| dx &= \int_0^1 |x^2 - 3x + 2| dx + \int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx + \int_2^3 |x^2 - 3x + 2| dx = \\ &= \int_0^1 (x^2 - 3x + 2) dx + \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2) dx + \int_2^3 (x^2 - 3x + 2) dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x \right]_2^3 = \left(\frac{5}{6} - 0 \right) + \left(-\frac{2}{3} + \frac{5}{6} \right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{11}{6} \end{aligned}$$

➤ Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $\int_1^e \ln x dx$.

Λύση: Προφανώς, η συνάρτηση $f(x) = \ln x$, είναι **συνεχής** στο διάστημα $[1, e]$.

$$\int_1^e \ln x dx = \int_1^e (x)' \ln x dx = [x \cdot \ln x]_1^e - \int_1^e x (\ln x)' dx = e \cdot \ln e - 1 \cdot \ln 1 - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = e - \int_1^e 1 dx = e - 1 \cdot (e - 1) = 1$$

Άσκηση B9(ι): Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $I = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

Λύση 1^η: Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, είναι **συνεχής** στο $[1, e^2]$, σαν πηλίκο **συνεχών** συναρτήσεων.

$$I = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 4 \int_1^{e^2} \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx = 4 \int_1^{e^2} \frac{\ln x^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{x}} dx = 4 \int_1^{e^2} \ln \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})' dx = 4 \int_1^e \ln u du = 4 \cdot 1 = 4.$$

$$u = \sqrt{x}, \quad du = (\sqrt{x})' dx \quad \text{και} \quad u_1 = \sqrt{1} = 1, \quad u_2 = \sqrt{e^2} = e. \quad (\text{Στην προηγούμενη άσκηση, βρήκαμε ότι } \int_1^e \ln x dx = 1)$$

$$\text{Λύση 2^η: } I = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^{e^2} \ln x \cdot (\sqrt{x})' dx = 2 \left[\ln x \cdot \sqrt{x} \right]_1^{e^2} - 2 \int_1^{e^2} (\ln x)' \cdot \sqrt{x} dx =$$

$$= 2 \left(\ln e^2 \cdot \sqrt{e^2} - \ln 1 \cdot \sqrt{1} \right) - 2 \int_1^{e^2} \frac{\sqrt{x}}{x} dx = 4e - 4 \int_1^{e^2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 4e - 4 \left[\sqrt{x} \right]_1^{e^2} = 4e - 4 \left(\sqrt{e^2} - \sqrt{1} \right) = 4e - 4e + 4 = 4$$

Άσκηση B10: Αν $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \eta\mu^2 x \, dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x \, dx$, να υπολογίσετε τα $I + J$, $I - J$, I , J .

Δίνεται ότι $\sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x$.

Λύση: $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \eta\mu^2 x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \cdot \eta\mu^2 x + x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x) \, dx =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot 1 \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \eta\mu^2 x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \cdot \eta\mu^2 x - x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot (\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x) \, dx =$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot (\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x) \, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x \, dx = -\frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot 2\sigma\upsilon\nu 2x \, dx \stackrel{(i)}{=} -\frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot (\eta\mu 2x)' \, dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \left([x \cdot \eta\mu 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)' \cdot \eta\mu 2x \, dx \right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \cdot \eta\mu \pi - 0 \cdot \eta\mu 0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu 2x \, dx \right) \stackrel{(ii)}{=} -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \cdot 0 - \left[-\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) =$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot (\sigma\upsilon\nu \pi - \sigma\upsilon\nu 0) = -\frac{1}{4} \cdot (-1 - 1) = \frac{1}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I + J = \frac{\pi^2}{8} \\ \text{και} \\ I - J = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{c} \text{«πρόσθεση κατά μέλη»} \\ \Leftrightarrow \\ \text{«αφαίρεση κατά μέλη»} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2I = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \\ \text{και} \\ 2J = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} I = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4} \\ \text{και} \\ J = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4} \end{array} \right\}$$

Προσοχή: Για την εύρεση παράγουσας, έχουμε δύο επιλογές:

Γνωρίζοντας τη σχετική παράγουσα:

(i) διαμορφώνουμε κατάλληλα τη συνάρτηση, «στο **ολοκλήρωμα**» ή

(ii) διαμορφώνουμε κατάλληλα τη συνάρτηση, «μέσα στην **αγκύλη**».

Σχόλιο: Μπορούμε να δούμε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot (\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x) \, dx$, χωρίς το «**βοήθημα**».

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot (\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) \cdot (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \, dx \stackrel{(1)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) \cdot (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)' \, dx =$$

$$= [x \cdot (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) \cdot (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} [x \cdot (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)]' \cdot (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) \, dx \stackrel{(2)}{=}$$

$$= [x \cdot (1 - 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) + x \cdot (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)'] \cdot (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) \, dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) + x \cdot (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)] \cdot (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) \, dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2 \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot (\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x) \, dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2 \, dx - I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2 \, dx - I \Rightarrow 2 \cdot I = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2 \, dx \Rightarrow 2 \cdot I = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x) \, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot I = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx \stackrel{(3)}{\Rightarrow} 2 \cdot I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\eta\mu x \cdot (\eta\mu x)' \, dx \stackrel{\eta\mu x = u}{\stackrel{(4)}}{=} \int_0^1 2u \, du = [u^2]_0^1 = 1 \Rightarrow I = \frac{1}{2}$$

Σημειώσεις: (1) $(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)' = (\eta\mu x)' - (\sigma\upsilon\nu x)' = \sigma\upsilon\nu x - (-\eta\mu x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$

$$(2) (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2 = \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x - 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = 1 - 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$$

$$(3) \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx = \frac{\pi}{2} - 1 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0, \quad (4) \quad u = \eta\mu x, \, du = (\eta\mu x)' \, dx, \, u_1 = \eta\mu 0 = 0, \, u_2 = \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1$$