

ΕΜΒΑΔΑ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου,

που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ και τον άξονα των x .

Λύση: Προφανώς, η συνάρτηση είναι **συνεχής** στο $D_f = \mathbb{R}$ και συνεπώς **συνεχής σε κάθε διάστημα**.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-2) - (x-2) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \{x = -1 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = 2\}$$

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Έτσι, το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι:

$$E = \int_{-1}^2 |f(x)| dx = \int_{-1}^2 |x^3 - 2x^2 - x + 2| dx =$$

$$= \int_{-1}^1 |x^3 - 2x^2 - x + 2| dx + \int_1^2 |x^3 - 2x^2 - x + 2| dx = \int_{-1}^1 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx + \int_1^2 (-x^3 + 2x^2 + x - 2) dx =$$

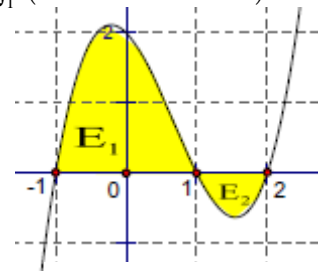
$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^2 =$$

$$= \left[\left(\frac{1^4}{4} - \frac{2 \cdot 1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 2 \cdot 1 \right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{2(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} + 2(-1) \right) \right] +$$

$$+ \left[\left(-\frac{2^4}{4} + \frac{2 \cdot 2^3}{3} + \frac{2^2}{2} - 2 \cdot 2 \right) - \left(-\frac{1^4}{4} + \frac{2 \cdot 1^3}{3} + \frac{1^2}{2} - 2 \cdot 1 \right) \right] =$$

$$= \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 2 \right) \right] + \left[\left(-4 + \frac{16}{3} + 2 - 4 \right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) \right] =$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 2 \right) + \left(-4 + \frac{16}{3} + 2 - 4 + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}$$



$$E_1 = \frac{8}{3} \text{ και } E_2 = \frac{5}{12}$$

$$E = E_1 + E_2 = \frac{37}{12}$$

Παρατήρηση: Το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ και τον άξονα των x , είναι ίσο με το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $|f|$ και τον άξονα των x , αφού η σύνθεση με τη συνάρτηση $g(x) = |x|$,

οδηγεί απλά στην «ανόρθωση» της C_f .

(Με άξονα περιστροφής τον άξονα των x , το χωρίο « E_2 », από «κάτω» βρέθηκε «πάνω».)

Επειδή ισχύει $|f(x)| \geq 0$, για κάθε $x \in [-1, 2]$, το ζητούμενο εμβαδόν είναι το $\int_{-1}^2 |f(x)| dx$.

Σχόλια: (i) Αν η συνάρτηση δεν είχε ρίζες, δε θα μπορούσαν να μας ζητήσουν «το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα των x », αφού δεν υπάρχει τέτοιο.

(ii) Όταν υπάρχουν ρίζες, τα όρια ολοκλήρωσης στο $E = \int_a^b |f(x)| dx$,

είναι για το a η μικρότερη ρίζα και για το b η μεγαλύτερη ρίζα.

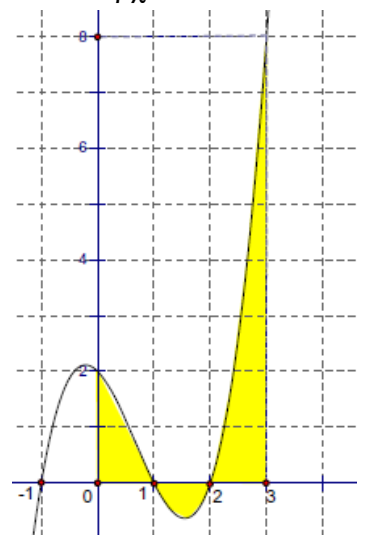
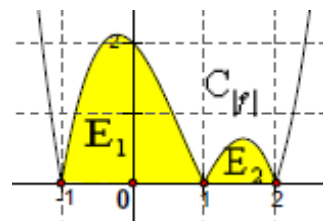
(iii) Αν μας έλεγαν: «Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 0$, $x = 3$ »,

τότε τα όρια ολοκλήρωσης θα τα καθόριζαν οι δυο ευθείες. (Εδώ, το E υπάρχει και όταν η συνάρτηση δεν έχει ρίζες.)

$$E = \int_0^3 |f(x)| dx = \int_0^3 |x^3 - 2x^2 - x + 2| dx =$$

$$= \int_0^1 |x^3 - 2x^2 - x + 2| dx + \int_1^2 |x^3 - 2x^2 - x + 2| dx + \int_2^3 |x^3 - 2x^2 - x + 2| dx =$$

$$= \int_0^1 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx - \int_1^2 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx + \int_2^3 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx = \frac{55}{12}$$



(iv) Στην περίπτωση μας, αν είχαμε υπολογίσει το $\int_{-1}^2 f(x) dx$ δε θα βρίσκαμε το ζητούμενο εμβαδόν, αφού η συνάρτησή μας «παίρνει» και **αρνητικές τιμές** στο διάστημα $[-1, 2]$.

$$\int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^2 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 = \frac{9}{4}$$

Για να βρούμε το παραπάνω ολοκλήρωμα, αξιοποιώντας τα εμβαδά, θα πρέπει να προσθέσουμε τα εμβαδά των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα των x και να αφαιρέσουμε εκείνα που βρίσκονται από κάτω.

$$\text{Έτσι, } \int_{-1}^2 f(x) dx = E_1 - E_2 = \frac{8}{3} - \frac{5}{12} = \frac{9}{4}$$

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ και $g(x) = x^2 - 1$.

Λύση: Προφανώς, οι συναρτήσεις είναι **συνεχείς** στο $D_f = D_g = \mathbb{R}$ και συνεπώς **συνεχείς σε κάθε διάστημα**.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 - (x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-3) - (x-3) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-3)(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \{x = -1 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = 3\} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1		1		3		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Έτσι, το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι:

$$\begin{aligned} E &= \int_{-1}^3 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^3 |x^3 - 3x^2 - x + 3| dx = \\ &= \int_{-1}^1 |x^3 - 3x^2 - x + 3| dx + \int_1^3 |x^3 - 3x^2 - x + 3| dx = \\ &= \int_{-1}^1 (x^3 - 3x^2 - x + 3) dx - \int_1^3 (x^3 - 3x^2 - x + 3) dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-1}^1 - \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x \right]_1^3 = \\ &= \left[\left(\frac{1^4}{4} - 1^3 - \frac{1^2}{2} + 3 \cdot 1 \right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - (-1)^3 - \frac{(-1)^2}{2} + 3(-1) \right) \right] - \left[\left(\frac{3^4}{4} - 3^3 - \frac{3^2}{2} + 3 \cdot 3 \right) - \left(\frac{1^4}{4} - 1^3 - \frac{1^2}{2} + 3 \cdot 1 \right) \right] = \\ &= \left(\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3 - \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{2} + 3 \right) - \left(\frac{81}{4} - 27 - \frac{9}{2} + 9 - \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{2} - 3 \right) = 4 - \left(\frac{80}{4} - \frac{8}{2} - 20 \right) = 4 - (-4) = 8 \end{aligned}$$

Σχόλια: (i) Προφανώς, **τα όρια ολοκλήρωσης**, καθορίζονται από τα σημεία «συνάντησης» των δυο γραφικών παραστάσεων.

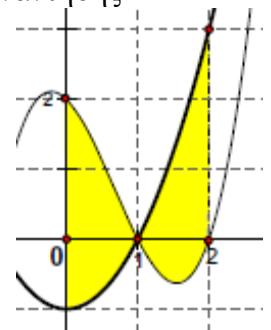
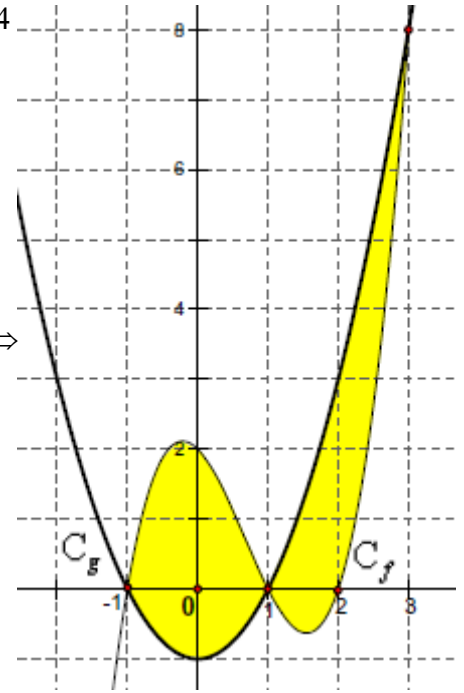
- (ii) Αν μας έλεγαν: «Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$, $g(x) = x^2 - 1$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 2$ »,

$$\begin{aligned} \text{τότε θα είχαμε } E &= \int_0^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx + \int_1^2 |f(x) - g(x)| dx = \\ &= \int_0^1 (x^3 - 3x^2 - x + 3) dx - \int_1^2 (x^3 - 3x^2 - x + 3) dx = \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x \right]_0^1 - \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x \right]_1^2 = \frac{7}{4} - \left(-\frac{7}{4} \right) = \frac{7}{4} + \frac{7}{4} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

- (iii) Στις ασκήσεις που είδαμε μέχρι τώρα, μπορούσαμε να ανταποκριθούμε και χωρίς σχήμα.

Μας αρκούσε να γνωρίζουμε τις ρίζες της συνάρτησης ή της διαφοράς των συναρτήσεων, καθώς και το πρόσημο της συνάρτησης (ή της διαφοράς) στα διαστήματα των «**ορίων ολοκλήρωσης**».

Ας δούμε τώρα, πώς μπορεί να αξιοποιηθεί η **αντίστροφη συνάρτηση** στο **1^ο τεταρτημόριο**.



3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^x$, τον άξονα των y και την ευθεία $y = e$.

Λύση: Η $f(x) = e^x$, είναι συνάρτηση «1-1» και έχει αντίστροφη την $f^{-1}(x) = \ln x$.

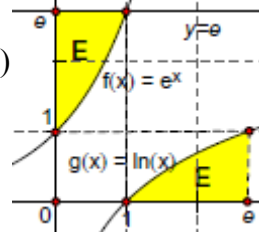
Οι γραφικές παραστάσεις αντίστροφων συναρτήσεων, είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ και συνεπώς το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f^{-1}(x) = \ln x$, τον άξονα των x και την ευθεία $x = e$.

Επειδή $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$, θα έχουμε $E = \int_1^e \ln x dx = [x \cdot \ln x - x]_1^e = (e \cdot \ln e - e) - (1 \cdot \ln 1 - 1) = 1$.

Σχόλιο: (i) Μπορούμε να υπολογίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν, σαν το εμβαδόν που περικλείεται από την C_f και τις ευθείες $y = e$ και $x = 0$. ($e^x = e \Leftrightarrow x = 1$)

$$E = \int_0^1 |e - e^x| dx = \int_0^1 (e - e^x) dx = [e \cdot x - e^x]_0^1 = (e \cdot 1 - e^1) - (e \cdot 0 - e^0) = 1.$$

(ii) Ασφαλώς, το παραπάνω εγχείρημα θέλει καλύτερη τεκμηρίωση. Όμως επειδή τέτοιες λύσεις «κινούνται στα όρια της νομιμότητας», θα καλλιεργήσουμε το νέο εργαλείο, σα λύση ανάγκης, χωρίς να επιμείνουμε στην αυστηρότητα.

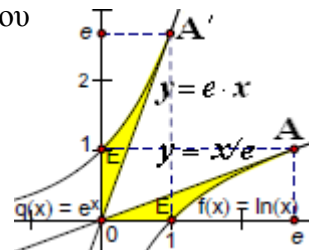


4. (Εφαρμογή 2) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = \ln x$, τον άξονα των x και την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(e, 1)$.

Λύση: Το ζητούμενο εμβαδόν, είναι προφανώς ίσο με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f^{-1}(x) = e^x$, την ευθεία $x = 0$ και την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο $A'(1, e)$.

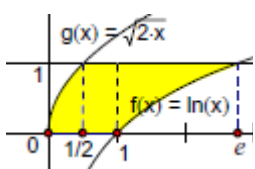
Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y - e = e^1(x - 1) \Leftrightarrow y = e \cdot x$

$$E = \int_0^1 (e^x - e \cdot x) dx = \left[e^x - e \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \left(e^1 - e \cdot \frac{1^2}{2} \right) - \left(e^0 - e \cdot \frac{0^2}{2} \right) = \frac{e}{2} - 1.$$



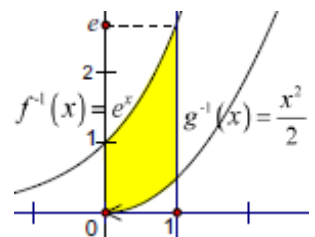
Σχόλιο: Είναι σημαντικό, οι οριζόντιες ευθείες οριοθέτησης του χωρίου, να μετατρέπονται σε κατακόρυφες, αφού τότε απλά καθορίζουν τα όρια ολοκλήρωσης.

➤ Ας υπολογίσουμε το εμβαδόν του παρακάτω χωρίου στις δυο περιπτώσεις.



$$E = \int_0^{1/2} \sqrt{2x} dx + \int_{1/2}^1 1 dx + \int_1^e (1 - \ln x) dx = \left[\frac{\sqrt{(2x)^3}}{3} \right]_0^{1/2} + 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \right) + [2x - x \ln x]_1^e = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + (2 \cdot e - e \cdot \ln e) - (2 - \ln 1) = e - \frac{7}{6}$$

$$E = \int_0^1 \left(e^x - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left[e^x - \frac{x^3}{6} \right]_0^1 = \left(e^1 - \frac{1^3}{6} \right) - \left(e^0 - \frac{0^3}{6} \right) = e - \frac{1}{6} - 1 = e - \frac{7}{6}$$



Προσοχή: Όλα τα παραπάνω, αφορούν συναρτήσεις γνησίως αύξουσες στο 1^ο τεταρτημόριο.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} , τον άξονα των x και την ευθεία $x = e$.

Λύση 1η: Επειδή $f^{-1}(x) = \ln x$ και $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$, το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι:

$$E = \int_1^e |\ln x| dx = \int_1^e \ln x dx = [x \cdot \ln x - x]_1^e = (e \cdot \ln e - e) - (1 \cdot \ln 1 - 1) = 1, \quad \boxed{1 < x \Leftrightarrow \ln 1 < \ln x \Leftrightarrow 0 < \ln x}$$

αφού η συνάρτηση $f^{-1}(x) = \ln x$ είναι, ως γνωστό, γνησίως αύξουσα.

Σχόλιο: Θα μπορούσαμε να βρούμε το ζητούμενο εμβαδόν, όπως παραπάνω, υπολογίζοντας το εμβαδόν του συμμετρικού, του χωρίου. Όμως ο στόχος της άσκησης, είναι να μας προετοιμάσει, στο να βρίσκουμε το εμβαδόν που αφορά την αντίστροφη συνάρτηση, χωρίς να γνωρίζουμε τον τύπο της.

Λύση 2η: $f(0) = e^0 = 1$, επομένως $f^{-1}(1) = 0$ και προφανώς το $x_0 = 1$ είναι η μοναδική ρίζα της f^{-1} .

$$\text{Έτσι το ζητούμενο εμβαδόν είναι } E = \int_1^e |f^{-1}(x)| dx.$$

Θέτοντας $x = f(u)$, θα έχουμε $dx = f'(u)du$ και για $x_1 = 1$, λύνοντας την εξίσωση $1 = f(u)$ θα έχουμε $1 = e^u \Leftrightarrow e^0 = e^u \Leftrightarrow u = 0$, $\boxed{u_1 = 0}$, ενώ για $x_2 = e$ ομοίως θα έχουμε $e = e^u \Leftrightarrow u = 1$, $\boxed{u_2 = 1}$.

$$\begin{aligned} E &= \int_1^e |f^{-1}(x)| dx = \int_0^1 |f^{-1}(f(u))| f'(u) du = \int_0^1 u |e^u| du = \int_0^1 u (e^u)' du = [ue^u]_0^1 - \int_0^1 (u)' e^u du = \\ &= [ue^u]_0^1 - \int_0^1 e^u du = [ue^u]_0^1 - [e^u]_0^1 = (1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0) - (e^1 - e^0) = e - e + 1 = 1 \end{aligned}$$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \sqrt{x}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} , τον άξονα των x και την ευθεία $x = e + 1$.

Λύση: Προφανώς η f είναι συνεχής με $D_f = [0, +\infty)$ και επειδή $f'(x) = (e^x + \sqrt{x})' = e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$

με $D_{f'} = (0, +\infty)$, η f είναι γνησίως αύξουσα.

$$f(0) = e^0 + \sqrt{0} = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + \sqrt{x}) = +\infty \text{ και συνεπώς το σύνολο τιμών της } f,$$

που είναι πεδίο ορισμού για την f^{-1} , είναι το $[1, +\infty)$. Επίσης το σύνολο τιμών της f^{-1} , που είναι πεδίο ορισμού της f , είναι το $[0, +\infty)$ και έτσι $f^{-1}(x) \geq 0, \forall x \in [1, +\infty)$.

$f(0) = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(1) = 0$ και επειδή η f^{-1} είναι «1-1» το $x_0 = 1$ είναι η μοναδική ρίζα της f^{-1} .

$$\text{Έτσι το ζητούμενο εμβαδόν είναι : } E = \int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx.$$

Θέτοντας $x = f(u)$, θα έχουμε $dx = f'(u)du$ και για $x_1 = 1$, λύνοντας την εξίσωση $1 = f(u)$ έχουμε τη γνωστή λύση $u = 0$, που είναι μοναδική αφού η f είναι «1-1» $\boxed{u_1 = 0}$, ενώ για $x_2 = e + 1$ ομοίως θα έχουμε $e + 1 = f(u) \Leftrightarrow e + 1 = e^u + \sqrt{u} \Leftrightarrow u = 1$, $\boxed{u_2 = 1}$, αφού η προφανής λύση είναι μοναδική.

$$\begin{aligned} E &= \int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx = \int_0^1 f^{-1}(f(u)) f'(u) du = \int_0^1 u \left(e^u + \frac{1}{2\sqrt{u}} \right) du = \int_0^1 \left(ue^u + \frac{\sqrt{u}}{2} \right) du = \int_0^1 u (e^u)' du + \int_0^1 \frac{\sqrt{u}}{2} du = \\ &= [ue^u]_0^1 - \int_0^1 e^u du + \left[\frac{\sqrt{u^3}}{3} \right]_0^1 = (1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0) - [e^u]_0^1 + \left(\frac{\sqrt{1^3}}{3} - \frac{\sqrt{0^3}}{3} \right) = e - (e^1 - e^0) + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Σχόλια: (i) Υπενθυμίζουμε ότι, «το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} , τον άξονα των x και την ευθεία $x = e + 1$ » είναι ίσο με το εμβαδόν του συμμετρικού του χωρίου, δηλαδή «το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα των y και την ευθεία $y = e + 1$ »

(ii) Ξέραμε ότι υπάρχει η f^{-1} , αφού η f ήταν «1-1» και όμως δε μπορούσαμε να βρούμε τον τύπο της. Αυτό όμως, δε μας εμπόδισε να βρούμε το ζητούμενο, με τη βοήθεια της «συζυγούς» συνάρτησης f .

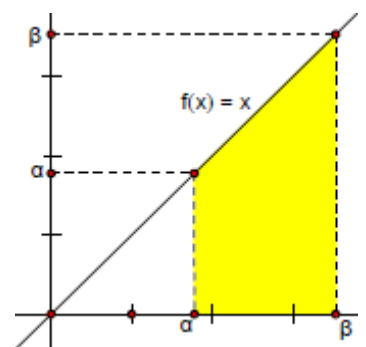
7. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τις ευθείες $y = x$, $y = 0$, $x = \alpha$ και $x = \beta$, με $0 < \alpha < \beta$.

Λύση: Προφανώς, πρόκειται για το $E = \int_{\alpha}^{\beta} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$.

Το εμβαδόν, είναι εμβαδόν τραπεζίου με βάσεις α, β και ύψος $\beta - \alpha$.

$$\text{Έτσι } E = \frac{\alpha + \beta}{2} (\beta - \alpha) = \frac{(\beta + \alpha)(\beta - \alpha)}{2} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}.$$

Σχόλιο: Η απλή αυτή άσκηση, μας προετοιμάζει για κάτι πιο δύσκολο.



8. Έστω $0 < \alpha < \beta$ και $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(\alpha) > \alpha$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$.

Να αποδειχθεί, ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f(\xi) = \xi$.

Απόδειξη: Έστω ότι $f(x) \geq x$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta]$. Τότε επειδή $f(\alpha) > \alpha$, θα έχουμε ότι $f(x) \geq x$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, επομένως $f(x) - x \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και συνεπώς $\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - x) dx \geq 0$.

Η συνάρτηση $h(x) = f(x) - x$, είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, $\int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx \geq 0$ και $h(\alpha) = f(\alpha) - \alpha > 0$.

Άρα $\int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx > 0$. (Θεώρημα 3^ο, σελίδα 332)

Έτσι, $\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - x) dx > 0$, επομένως $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > \int_{\alpha}^{\beta} x dx$ και συνεπώς $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$.

ΑΤΟΠΟ, αφού $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$.

Άρα υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta]$ με $f(x_0) < x_0$, δηλαδή $f(x_0) - x_0 < 0$ και επομένως $h(x_0) < 0$.

Αφού η h είναι συνεχής στο $[\alpha, x_0]$ και $h(\alpha) \cdot h(x_0) < 0$, συνεπώς υπάρχει $\xi \in (\alpha, x_0) \subseteq (\alpha, \beta)$ με $h(\xi) = 0$, δηλαδή $f(\xi) - \xi = 0$ και επομένως $f(\xi) = \xi$.

Σχόλια: (i) Η άσκηση προσφέρεται για γεωμετρική λύση. Όταν μας ζητάνε $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f(\xi) = \xi$, στην ουσία μας ζητάνε σημείο της C_f , πάνω στην $y = x$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει σημείο της C_f , πάνω από την $y = x$, αφού $f(\alpha) > \alpha$ και επομένως αφού η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, μας αρκεί να υπάρχει σημείο της C_f , κάτω από την $y = x$, γιατί τότε θα υπάρχει σημείο της C_f , πάνω στην $y = x$. (Αν f συνεχής σε διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε μπορούμε να σχεδιάσουμε με «μονοκοντυλιά» την C_f , από το $(\alpha, f(\alpha))$ μέχρι το $(\beta, f(\beta))$ και επομένως στην περίπτωση μας, να κόψουμε τη διχοτόμο ($y = x$))

Επειδή $0 < \alpha < \beta$, αντιλαμβανόμαστε το $\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$ σαν το εμβαδόν του τραπεζίου, με κορυφές $A(\alpha, 0)$, $B(\alpha, \alpha)$, $\Gamma(\beta, \beta)$ και $\Delta(\beta, 0)$. Βλέπουμε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$ και λέμε: «αποκλείεται η C_f να μην έχει σημείο κάτω από τη διχοτόμο», και στο «γιατί;» απαντάμε: «γιατί αλλιώς, το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ θα αντιπροσώπευε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα των x και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$, επομένως θα περιείχε το τραπέζιο, δηλαδή $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$, ΑΤΟΠΟ!!»

Στην ουσία, ακόμα και αυτοί που δίνουν την «αλγεβρική λύση», σαν προϊόν «επιφοίτησης», πλειοψηφικά, πρώτα λύνουν το πρόβλημα στη «γλώσσα των εικόνων των εννοιών» και μετά το μεταφράζουν και το διευρύνουν στη «γλώσσα των Μαθηματικών».

(ii) Αν από την υπόθεση έλειπε το στοιχείο $0 < \alpha < \beta$, τότε η λύση θα ήταν ίδια με αυτήν που δώσαμε, μόνο που θα ήταν δύσκολο πια, να δοθεί γεωμετρική λύση.

9. Αν $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, με $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα των x και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$, δεν μπορεί να υπερβαίνει το εμβαδόν ορθογώνιου με διαστάσεις M , $\beta - \alpha$ και δεν μπορεί να υπολείπεται του εμβαδού ορθογώνιου με διαστάσεις m , $\beta - \alpha$, όπου m το ελάχιστο και M το μέγιστο της f .

Λύση: Γενικά, αφού $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$, άρα $f(x) - m \geq 0$ και $M - f(x) \geq 0$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$.

Επομένως $\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - m) dx \geq 0$ και $\int_{\alpha}^{\beta} (M - f(x)) dx \geq 0$, δηλαδή $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} m dx \geq 0$ και $\int_{\alpha}^{\beta} M dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$, έτσι $\int_{\alpha}^{\beta} m dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} M dx$ και $m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq M(\beta - \alpha)$.

Στην περίπτωση μας, αφού $f(x) > 0, \forall x \in [\alpha, \beta]$, θα έχουμε ότι $0 < m \leq M$ και ότι το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ εκφράζει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα των x και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$, ενώ τα $m(\beta - \alpha)$, $M(\beta - \alpha)$ εκφράζουν τα εμβαδά των αντίστοιχων ορθογώνιων.

Συμπλήρωμα: Θεωρήσαμε προφανώς, ότι αφού η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$,

συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ είναι και οι συναρτήσεις $g(x) = f(x) - m$,

$h(x) = M - f(x)$, καθώς και οι σταθερές $\phi(x) = m$, $\varphi(x) = M$.

Σχόλιο: Δεν υπερβαίνει, σημαίνει ότι δεν είναι μεγαλύτερο και επομένως είναι μικρότερο ή ίσο. Δεν υπολείπεται, σημαίνει ότι δεν είναι μικρότερο και επομένως είναι μεγαλύτερο ή ίσο.



10. Το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 1$

και την ευθεία $y = 5$ χωρίζεται από την ευθεία $y = \alpha^2 + 1, \alpha > 0$,

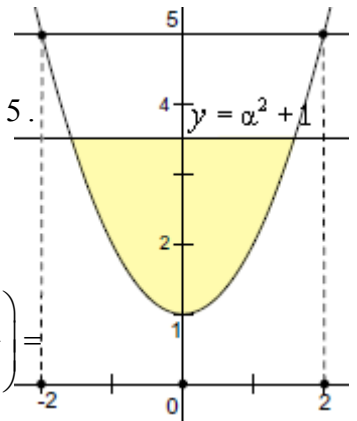
σε δυο ισεμβαδικά χωρία. Να βρείτε την τιμή του α .

Λύση: Θα βρω τις τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με την ευθεία $y = 5$.

$$x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \{x = -2 \text{ ή } x = 2\}$$

και επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 1$ και την ευθεία $y = 5$ είναι:

$$E = \int_{-2}^2 (5 - x^2 - 1) dx = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = \left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left(4(-2) - \frac{(-2)^3}{3} \right) = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$



Τώρα, θα βρω τις τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με την ευθεία $y = \alpha^2 + 1, \alpha > 0$.

$x^2 + 1 = \alpha^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow \{x = -\alpha \text{ ή } x = \alpha\}$ και επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 1$ και την ευθεία $y = \alpha^2 + 1$ είναι:

$$E_1 = \int_{-\alpha}^{\alpha} (\alpha^2 + 1 - x^2 - 1) dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} (\alpha^2 - x^2) dx = \left[\alpha^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-\alpha}^{\alpha} = \left(\alpha^3 - \frac{\alpha^3}{3} \right) - \left(-\alpha^3 - \frac{(-\alpha)^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \alpha^3$$

Για να χωρίζεται το E , σε δυο ισεμβαδικά χωρία από την $y = \alpha^2 + 1$, «πρέπει και αρκεί» $\frac{E}{2} = E_1$.

$$\text{Όμως, } \frac{E}{2} = E_1 \Leftrightarrow \frac{16}{3} = \frac{4}{3} \alpha^3 \Leftrightarrow \alpha^3 = 4 \Leftrightarrow \alpha = \sqrt[3]{4} \text{ και συνεπώς η τιμή του } \alpha \text{ είναι } \alpha = \sqrt[3]{4}.$$

11. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση

της συνάρτησης $f(x) = 3x^2 + 1$ και τις ευθείες $y = 2x - 1$, $x = 0$ και $x = 3$,

να βρεθεί ευθεία, που να διαιρεί το παραπάνω χωρίο, σε χωρία με λόγο εμβαδών ένα προς δυο.

Λύση: $f(x) - y = 3x^2 + 1 - (2x - 1) = 3x^2 - 2x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, αφού η διακρίνουσα του τριωνύμου

$$\text{είναι } \Delta = -20 < 0 \text{ και επομένως } E = \int_0^3 (f(x) - y) dx = \int_0^3 (3x^2 - 2x + 2) dx = \left[x^3 - x^2 + 2x \right]_0^3 = 24$$

$$\frac{E}{3} = \frac{24}{3} = 8, \text{ και θα βρούμε } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ τέτοιο ώστε η ευθεία } x = \lambda \text{ να διαιρεί το χωρίο}$$

σε τμήματα με εμβαδά 8(τετραγωνικές μονάδες) και 16(τ.μ.).

$$\text{Θα λύσουμε την εξίσωση: } \int_0^{\lambda} (3x^2 - 2x + 2) dx = 8 \Leftrightarrow \left[x^3 - x^2 + 2x \right]_0^{\lambda} = 8 \Leftrightarrow \lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 - 2^3 - \lambda(\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4) - \lambda(\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda^2 + \lambda + 4) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

Σχόλιο: Προφανώς, η λύση της ευθείας $x = 2$ δεν είναι μοναδική.

Επειδή δε μας ζητούσαν όλες τις λύσεις του προβλήματος, αναζητήσαμε την πιο προσιτή λύση.