

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ – ΕΜΒΑΔΑ

«λεπτομέρειες»

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου,

που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ και τον άξονα των x .

Λύση 1^η: Η συνάρτηση είναι **συνεχής** στο $D_f = \mathbb{R}$, ως πολωνυμική, και συνεπώς είναι **συνεχής σε κάθε διάστημα**. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow \{x = -1 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = 2\}$

Όπως είναι γνωστό, η σταθερή συνάρτηση $g(x) = 0$, έχει για γραφική παράστασή της, τον άξονα των x , και επομένως το ζητούμενο μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: «Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ και $g(x) = 0$.

Έτσι, το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι: $E = \int_{-1}^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^2 |f(x) - 0| dx = \int_{-1}^2 |f(x)| dx$

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

$$|f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} -x^3 + 2x^2 + x - 2, & \text{αν } x \leq -1 \\ x^3 - 2x^2 - x + 2, & \text{αν } -1 \leq x \leq 1 \\ -x^3 + 2x^2 + x - 2, & \text{αν } 1 \leq x \leq 2 \\ x^3 - 2x^2 - x + 2, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$$

$$E = \int_{-1}^2 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 |f(x)| dx + \int_1^2 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx + \int_1^2 (-x^3 + 2x^2 + x - 2) dx = \frac{37}{12}$$

Σχόλιο: Το **ορισμένο ολοκλήρωμα**, αναφέρεται σε **κλειστό διάστημα**, και έτσι, για να είμαστε συνεπείς με το δεδομένο αυτό, χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού

a , στην μη «οικονομική» εκδοχή του: $|a| = \begin{cases} a, & \text{αν } a \geq 0 \\ -a, & \text{αν } a \leq 0 \end{cases}$ $+0 = 0 = -0$

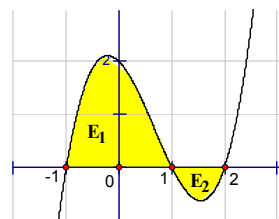
Λύση 2^η: Για τη συνάρτηση f , έχουμε: $f(x) \geq 0$, στο $[-1, 1]$, και επομένως, το εμβαδόν του χωρίου που προβάλλεται στο διάστημα αυτό, θα είναι

$E_1 = \int_{-1}^1 f(x) dx$. Ομοίως, επειδή $f(x) \leq 0$, στο $[1, 2]$, το εμβαδόν του χωρίου

που προβάλλεται στο διάστημα αυτό, θα είναι $E_2 = -\int_1^2 f(x) dx$.

$$\text{Έτσι, } E = E_1 + E_2 = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx = \int_{-1}^1 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx + \int_1^2 (-x^3 + 2x^2 + x - 2) dx = \frac{37}{12}$$

Σχόλιο: Στη λύση αυτή, είμαστε απόλυτα «νόμιμοι», αφού χρησιμοποιήσαμε αποκλειστικά, την «Θεωρία» που είναι καταγεγραμμένη στο σχολικό βιβλίο.



2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν E , του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ \eta\mu x, & x > 0 \end{cases}, \text{ τον άξονα των } x, \text{ και τις ευθείες } x = -1 \text{ και } x = \frac{\pi}{2}.$$

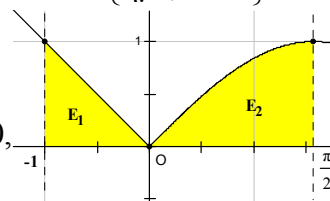
Λύση: Η συνάρτηση f , είναι **συνεχής** στο $\mathbb{R}$, και επομένως είναι συνεχής στο $\left[-1, \frac{\pi}{2}\right]$.

Επειδή $f(0) = -0 = 0 = \eta\mu 0$, ο τύπος της f , μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ \eta\mu x, & x \geq 0 \end{cases}$.

Για $x \in [-1, 0]$, έχουμε $f(x) = -x \geq 0$, και επομένως $E_1 = \int_{-1}^0 f(x) dx =$

$$= \int_{-1}^0 (-x) dx = \left[-\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{2}. \text{ Ομοίως, για } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ έχουμε } f(x) = \eta\mu x \geq 0,$$

$$\text{και επομένως } E_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1. \text{ Έτσι, } E = E_1 + E_2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$



Σχόλια: (1) Για να είμαστε «νόμιμοι», αφού επικαλεστούμε, όπως παραπάνω, τη σταθερή συνάρτηση $g(x) = 0$, που έχει για γραφική παράστασή της, τον άξονα των x , μπορούμε στη συνέχεια να πούμε:

$$E = \int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} |f(x)| dx = \int_{-1}^0 |f(x)| dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x)| dx = \int_{-1}^0 |-x| dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\eta \mu x| dx =$$

$$= \int_{-1}^0 (-x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu x dx = \left[\frac{-x^2}{2} \right]_{-1}^0 + [-\sigma \upsilon \nu x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

(2) Εννοείται, πως θα πρέπει να καταγράψουμε, ότι η συνάρτηση f , είναι **συνεχής** στο $(-\infty, 0)$, σαν πολυωνυμική, είναι **συνεχής** στο $(0, +\infty)$, αφού η $h(x) = \eta \mu x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, και τέλος ότι είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, αφού $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = f(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \eta \mu x = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

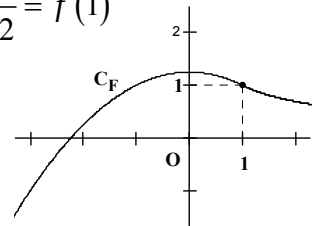
Προσοχή: Στις συναρτήσεις, που εμείς μπορούμε να επεξεργαστούμε, πάντα θα υπάρχει η δυνατότητα επαναδιατύπωσης του τύπου, έτσι ώστε το «συνοριακό x_0 », να «βρίσκει» την τιμή του, και από τους δύο κλάδους. Αυτό μας εξασφαλίζει τη «νόμιμη» δυνατότητα αντικατάστασης, για κλειστά διαστήματα. (3) Η δυνατότητα, να «μπορεί» το «συνοριακό σημείο», να «βρει» την τιμή του, και από τους δύο κλάδους της συνάρτησης, δεν θα πρέπει να θεωρείται δεδομένη στις **συνεχείς** συναρτήσεις.

► Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2}, & x \leq 1 \\ \frac{x-1-x \cdot \ln x}{x(x-1)^2}, & x > 1 \end{cases}$ είναι **συνεχής*** στο $\mathbb{R}$, χωρίς όμως να

υπάρχει η δυνατότητα, να «βρει» την τιμή της στο $x_0 = 1$, από τον «κάτω κλάδο».

$$* \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1-x \cdot \ln x}{x(x-1)^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1-x \cdot \ln x)'}{(x^3-2x^2+x)'} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-\ln x-1}{3x^2-4x+1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\frac{1}{x}}{6x-4} = -\frac{1}{2} = f(1)$$

Έτσι, παρά το ότι υπάρχει η $F(x) = \begin{cases} \frac{-x^2+5}{4}, & x \leq 1 \\ \frac{\ln x}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$, με $F'(x) = f(x)^{**}$,



εμείς δεν μπορούμε να βρούμε **ορισμένα ολοκληρώματα** από το α στο β , αν $1 \in (\alpha, \beta)$.

$$** F'(x) = \left(\frac{-x^2+5}{4} \right)' = \frac{-x}{2}, \text{ στο } (-\infty, 1)$$

$$F'(x) = \left(\frac{\ln x}{x-1} \right)' = \frac{(\ln x)' \cdot (x-1) - (\ln x) \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{\frac{x-1}{x} - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x \cdot \ln x}{x(x-1)^2}, \text{ στο } (1, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{\ln x}{x-1} - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2x-2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{-x^2+5}{4} - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{-x^2+1}{x-1} \right) = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x-1) = -\frac{1}{2}$$

► Επίσης, η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ \frac{\eta \mu x}{x}, & x > 0 \end{cases}$, είναι προφανώς **συνεχής** στο $\mathbb{R}$. Προφανώς, και σε

αυτήν την περίπτωση, η f «δεν μπορεί να βρει» την τιμή της στο $x_0 = 0$, από τον «κάτω κλάδο».

Εδώ, υπάρχει σαν πρόσθετο γεγονός, ότι εμείς δεν μπορούμε να βρούμε παράγουσες της f , αφού αυτές καταγράφονται από τους Μαθηματικούς, σαν συναρτήσεις που δεν είναι «στοιχειώδεις».