

ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $G(x) = \int_{-1}^{\sqrt{x-1}} \sqrt{4-t^2} dt$.

Να βρείτε: α) Το πεδίο ορισμού της G . β) Την παράγωγο της G .

Λύση: Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ είναι **συνεχής**, σαν «ρίζα» πολωνυμικής, και συνεπώς συνεχούς, συναρτήσεως. $D_f = [-2, 2]$, αφού για να ορίζεται η f , «πρέπει και αρκεί» $4-x^2 \geq 0$, δηλαδή $-2 \leq x \leq 2$.

α) Η G «μπορεί να οριστεί», αφού $-1 \in [-2, 2]$, αρκεί να υπάρχουν $x \in \mathbb{R}$, για τα οποία $\sqrt{x-1} \in [-2, 2]$.

Το πεδίο ορισμού της G απαρτίζεται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$,

για τα οποία η παράσταση $\sqrt{x-1}$ είναι **πραγματικός αριθμός** και **ανήκει στο** $[-2, 2]$.

$$x \in D_G \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-1 \geq 0 \text{ και} \\ -2 \leq \sqrt{x-1} \leq 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq 1 \text{ και} \\ (\sqrt{x-1})^2 \leq 2^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq 1 \text{ και} \\ x-1 \leq 4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5 \text{ και συνεπώς } D_G = [1, 5].$$

$$\beta) \quad G'(x) = \left(\int_{-1}^{\sqrt{x-1}} \sqrt{4-t^2} dt \right)' = \sqrt{4-(\sqrt{x-1})^2} \cdot (\sqrt{x-1})' = \frac{\sqrt{4-(x-1)}}{2\sqrt{x-1}} \cdot (x-1)' = \frac{\sqrt{5-x}}{2\sqrt{x-1}}$$

«με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα»,

δηλαδή με την προϋπόθεση να ισχύει $x \neq 1$. Επομένως $D_{G'} = (1, 5]$.

Σχόλιο: Η λύση μας, είναι η πλέον «οικονομική», με «στήριγμα» το σχολικό βιβλίο.

2η Λύση: Θέτουμε $f(x) = \sqrt{4-x^2}$. $x \in D_f \Leftrightarrow 4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$, αφού το ελλειπές τριώνυμο

$-x^2 + 4$, γίνεται θετικό, δηλαδή ετερόσημο του $\alpha = -1$, «εντός των ριζών» και μηδέν «πάνω στις ρίζες».

Έτσι $D_f = [-2, 2]$, και η f είναι **συνεχής**, σαν «ρίζα» πολωνυμικής συνάρτησης,

η οποία, όπως γνωρίζουμε, είναι συνεχής.

Η συνάρτηση $F(x) = \int_{-1}^x \sqrt{4-t^2} dt$, είναι **μια παράγουσα** της f στο $[-2, 2]$, αφού $-1 \in [-2, 2]$

και με $g(x) = \sqrt{x-1}$, θα έχουμε $(F \circ g)(x) = F(g(x)) = F(\sqrt{x-1}) = \int_{-1}^{\sqrt{x-1}} \sqrt{4-t^2} dt = G(x)$.

α) Επειδή $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$, θα έχουμε $D_g = [1, +\infty)$ και, όπως είναι γνωστό, $D_F = [-2, 2]$.

$$\begin{aligned} \text{Έτσι, } x \in D_G = D_{F \circ g} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in D_g \text{ και} \\ g(x) \in D_F \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in [1, +\infty) \text{ και} \\ \sqrt{x-1} \in [-2, 2] \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-1 \geq 0 \text{ και} \\ -2 \leq \sqrt{x-1} \leq 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ &\left\{ \begin{array}{l} x \geq 1 \text{ και} \\ |\sqrt{x-1}| \leq 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq 1 \text{ και} \\ |\sqrt{x-1}|^2 \leq 2^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq 1 \text{ και} \\ x-1 \leq 4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5 \text{ και συνεπώς } D_G = [1, 5]. \end{aligned}$$

β) Η G είναι συνεχής, σαν σύνθεση συνεχών συναρτήσεων: της $g(x) = \sqrt{x-1}$,

που είναι «ρίζα» πολωνυμικής, και της F , που είναι συνεχής σαν παραγωγίσιμη.

Η g είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in (1, 5]$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ και η F είναι

παραγωγίσιμη στο $g((1, 5])$, αφού $g((1, 5]) \subseteq [-2, 2]$, και έτσι η $G = F \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 5]$,

$$\text{με } G'(x) = \left(\int_{-1}^{\sqrt{x-1}} \sqrt{4-t^2} dt \right)' = \sqrt{4-(\sqrt{x-1})^2} \cdot (\sqrt{x-1})' = \frac{\sqrt{4-(x-1)}}{2\sqrt{x-1}} \cdot (x-1)' = \frac{\sqrt{5-x}}{2\sqrt{x-1}}.$$

Θα εξετάσουμε αν η G είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, δηλαδή αν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{G(x) - G(1)}{x-1}$.

Επειδή η G είναι συνεχής, θα έχουμε $\lim_{x \rightarrow 1^+} (G(x) - G(1)) = 0$ και με δεδομένο ότι $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$,

αντιμετωπίζουμε απροσδιόριστη μορφή « $\frac{0}{0}$ ». Όμως, η G είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 5)$, και συνεπώς

μπορούμε να εργαστούμε, για την «άρση» της απροσδιοριστίας, με τον κανόνα de L'Hospital.

Στο $(1,5)$ θα έχουμε: $\frac{(G(x)-G(1))'}{(x-1)'} = G'(x) = \frac{\sqrt{5-x}}{2\sqrt{x-1}}$, και επειδή $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{5-x}}{2\sqrt{x-1}} = +\infty$,

τελικά θα έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{G(x)-G(1)}{x-1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(G(x)-G(1))'}{(x-1)'} = \lim_{x \rightarrow 1^+} G'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{5-x}}{2\sqrt{x-1}} = +\infty$,

επομένως η G δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και συνεπώς $D_{G'} = (1,5]$.

$$\left\{ \lim_{x \rightarrow 1^+} (2\sqrt{x-1}) = 0 \text{ και } 2\sqrt{x-1} > 0, \text{ στο } (1,5) \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\sqrt{5-x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \right) \stackrel{\langle 2 \cdot (+\infty) \rangle}{=} +\infty$$

2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = \int_{1/x}^{2x} \sqrt{t^2-1} dt$.

Να βρείτε: α) Το πεδίο ορισμού της F .

β) Την παράγωγο της F .

Λύση: Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ είναι **συνεχής**, σαν «ρίζα» πολυωνυμικής, και συνεπώς συνεχούς, συναρτήσεως. $D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, αφού για να ορίζεται η f , «πρέπει και αρκεί» $x^2 - 1 \geq 0$.

α) Για να ορίζεται η F , «πρέπει και αρκεί», τα όρια ολοκλήρωσης να ανήκουν στο ίδιο διάστημα του D_f .

$$\begin{aligned} x \in D_F &\Leftrightarrow \left\{ \left\{ \begin{array}{l} 2x \in (-\infty, -1] \\ \text{και } \frac{1}{x} \in (-\infty, -1] \end{array} \right\} \text{ ή } \left\{ \begin{array}{l} 2x \in [1, +\infty) \\ \text{και } \frac{1}{x} \in [1, +\infty) \end{array} \right\} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \left\{ \begin{array}{l} 2x \leq -1 \\ \text{και } \frac{1}{x} \leq -1 \end{array} \right\} \text{ ή } \left\{ \begin{array}{l} 2x \geq 1 \\ \text{και } \frac{1}{x} \geq 1 \end{array} \right\} \right\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left\{ \left\{ \begin{array}{l} x \leq \frac{-1}{2} \\ \text{και } -1 \leq x \end{array} \right\} \text{ ή } \left\{ \begin{array}{l} x \geq \frac{1}{2} \\ \text{και } 1 \geq x \end{array} \right\} \right\} \Leftrightarrow x \in \left[-1, \frac{-1}{2} \right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1 \right], \text{ δηλαδή } \boxed{D_F = \left[-1, \frac{-1}{2} \right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1 \right]}. \end{aligned}$$

β) Θα βρούμε την παράγωγο της F , εργαζόμενοι διαδοχικά, σε κάθε διάστημα του D_F .

(i) Στο $\Delta_1 = \left[-1, \frac{-1}{2} \right]$ και για $a \in \left[-1, \frac{-1}{2} \right]$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{1/x}^{2x} \sqrt{t^2-1} dt = \int_{1/x}^a \sqrt{t^2-1} dt + \int_a^{2x} \sqrt{t^2-1} dt = -\int_a^{1/x} \sqrt{t^2-1} dt + \int_a^{2x} \sqrt{t^2-1} dt \quad \text{και} \\ F'(x) &= \left(-\int_a^{1/x} \sqrt{t^2-1} dt + \int_a^{2x} \sqrt{t^2-1} dt \right)' = -\left(\int_a^{1/x} \sqrt{t^2-1} dt \right)' + \left(\int_a^{2x} \sqrt{t^2-1} dt \right)' = \\ &= -\sqrt{\frac{1}{x^2}-1} \cdot \left(\frac{1}{x} \right)' + \sqrt{(2x)^2-1} \cdot (2x)' = -\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) + 2\sqrt{4x^2-1} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2 \cdot |x|} + 2\sqrt{4x^2-1}. \end{aligned}$$

«με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα», δηλαδή σε ολόκληρο το Δ_1 .

(ii) Στο $\Delta_2 = \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$ και για $a \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{1/x}^{2x} \sqrt{t^2-1} dt = \int_{1/x}^a \sqrt{t^2-1} dt + \int_a^{2x} \sqrt{t^2-1} dt = -\int_a^{1/x} \sqrt{t^2-1} dt + \int_a^{2x} \sqrt{t^2-1} dt \quad \text{και} \\ F'(x) &= \left(-\int_a^{1/x} \sqrt{t^2-1} dt + \int_a^{2x} \sqrt{t^2-1} dt \right)' = -\left(\int_a^{1/x} \sqrt{t^2-1} dt \right)' + \left(\int_a^{2x} \sqrt{t^2-1} dt \right)' = \\ &= -\sqrt{\frac{1}{x^2}-1} \cdot \left(\frac{1}{x} \right)' + \sqrt{(2x)^2-1} \cdot (2x)' = -\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) + 2\sqrt{4x^2-1} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2 \cdot |x|} + 2\sqrt{4x^2-1}. \end{aligned}$$

«με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα», δηλαδή σε ολόκληρο το Δ_2 .

$$\text{Συνεπώς, } F'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2 \cdot |x|} + 2\sqrt{4x^2-1}, \text{ με } D_{F'} = D_F = \left[-1, \frac{-1}{2} \right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1 \right].$$

3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \int_x^{x+1} e^{\sin 2\pi t} dt$ είναι σταθερή.

Απόδειξη: Η συνάρτηση $g(x) = e^{\sin 2\pi x}$ είναι προφανώς συνεχής συνάρτηση με $D_g = \mathbb{R}$.

Έτσι, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_x^{x+1} e^{\sin 2\pi t} dt = \int_x^0 e^{\sin 2\pi t} dt + \int_0^{x+1} e^{\sin 2\pi t} dt = -\int_0^x e^{\sin 2\pi t} dt + \int_0^{x+1} e^{\sin 2\pi t} dt$, επομένως

$$f'(x) = \left(\int_0^{x+1} e^{\sin 2\pi t} dt - \int_0^x e^{\sin 2\pi t} dt \right)' = \left(\int_0^{x+1} e^{\sin 2\pi t} dt \right)' - \left(\int_0^x e^{\sin 2\pi t} dt \right)' = e^{\sin[2\pi(x+1)]} (x+1)' - e^{\sin 2\pi x} =$$

$$= e^{\sin(2\pi + 2\pi x)} - e^{\sin 2\pi x} = e^{\sin 2\pi x} - e^{\sin 2\pi x} = 0, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ και συνεπώς η } f \text{ είναι σταθερή στο } \mathbb{R}.$$

Σχόλιο: Επειδή, με $h(x) = x+1$ έχουμε $D_h = \mathbb{R}$, και επειδή $D_g = \mathbb{R}$, μπορούσαμε να μετασχηματίσουμε την f στο $\mathbb{R}$, χρησιμοποιώντας οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, αντί για το 0.

Επίσης, θεωρήσαμε προφανές ότι «**τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα**», σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

Εξάλλου, έχουμε αντιληφθεί, ότι πρόβλημα μπορεί να υπάρξει, στα άκρα κλειστών διαστημάτων.

4. Να βρείτε το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} \sqrt{5+t^2} dt$.

Λύση: Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{5+x^2}$ είναι **συνεχής** συνάρτηση με $D_f = \mathbb{R}$, συνεπώς η συνάρτηση

$F(h) = \int_2^{2+h} \sqrt{5+t^2} dt$ προφανώς ορίζεται στο $\mathbb{R}$, και είναι **συνεχής**, σαν παραγωγίσιμη.

Επειδή $\lim_{h \rightarrow 0} \int_2^{2+h} \sqrt{5+t^2} dt = \lim_{h \rightarrow 0} F(h) = F(0) = \int_2^2 \sqrt{5+t^2} dt = 0$ και $\lim_{h \rightarrow 0} h = 0$, στην προσπάθειά μας να

βρούμε το ζητούμενο όριο, αντιμετωπίζουμε απροσδιόριστη μορφή « $\frac{0}{0}$ ».

$$\frac{\left(\int_2^{2+h} \sqrt{5+t^2} dt \right)'}{(h)'} = \frac{\sqrt{5+(2+h)^2} \cdot (2+h)'}{1} = \sqrt{5+(2+h)^2} \text{ και } \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{5+(2+h)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

$$\text{Άρα, υπάρχει το } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} \sqrt{5+t^2} dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\int_2^{2+h} \sqrt{5+t^2} dt \right)'}{(h)'} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{5+(2+h)^2} = 3.$$

5. Αν $F(x) = \int_0^x xf(t)dt$, να βρείτε την $F'(x)$.

Λύση: Προφανώς, η f είναι συνεχής σε διάστημα που περιέχει το 0.

Αν $\Delta \subseteq D_f$, είναι το **ευρύτερο** διάστημα με την ιδιότητα $0 \in \Delta$ και f συνεχής στο Δ , τότε $\Delta = D_F$.

Κάθε $x \in \Delta$, «είναι σταθερά» στο $\int_0^x xf(t)dt$, αφού η μεταβλητή ολοκλήρωσης είναι το t .

Έτσι, για κάθε $x \in \Delta$, $F(x) = \int_0^x xf(t)dt = x \int_0^x f(t)dt$ και επομένως

$$F'(x) = \left(x \int_0^x f(t)dt \right)' = (x)' \int_0^x f(t)dt + x \left(\int_0^x f(t)dt \right)' = \int_0^x f(t)dt + xf(x) \text{ στο } \Delta.$$

6. Αν $\int_0^x tg(t)dt = x^4 + x^6$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $g(1)$.

Λύση: Προφανώς, η συνάρτηση $f(x) = xg(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

και η $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $F'(x) = \left(\int_0^x f(t)dt \right)' = f(x) = xg(x)$.

Έτσι, $\int_0^x tg(t)dt = x^4 + x^6 \Rightarrow \left(\int_0^x tg(t)dt \right)' = (x^4 + x^6)' \Rightarrow xg(x) = 4x^3 + 6x^5$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

και επομένως $1 \cdot g(1) = 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^5$, δηλαδή $g(1) = 10$.

7. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta$.

Λύση: Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ είναι προφανώς **συνεχής** στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Επειδή $1 \in (0, +\infty)$, το πεδίο ορισμού της F απαρτίζεται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, για τα οποία $\sqrt{x} \in (0, +\infty)$.

$$x \in D_F \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \text{ και} \\ \sqrt{x} \in (0, +\infty) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \text{ και} \\ \sqrt{x} > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \text{ και} \\ x > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x > 0, \text{ και συνεπώς } D_F = (0, +\infty).$$

Επειδή $F(x) = -\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta$ και $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ στο $(0, +\infty)$, η F είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$

$$\text{και } F'(x) = \left(-\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta \right)' = -\frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' = -\frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{\sin \sqrt{x}}{2x},$$

αφού στο $(0, +\infty)$ «τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα».

8. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_1^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt$ είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$ και να βρείτε τον τύπο της.

Απόδειξη: Η **συνεχής** συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, έχει $D_g = \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση F ορίζεται στο $(0, +\infty)$, αφού προφανώς $D_F = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_1^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt \right)' = \left(\int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt \right)' + \left(\int_1^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt \right)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(1/x)^2} \cdot \left(\frac{1}{x} \right)' = \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{x^2}{x^2+1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{1+x^2} \right) = 0, \text{ στο } (0, +\infty). \end{aligned}$$

Επομένως η F είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$, και επειδή $F(1) = \int_1^1 \frac{1}{1+t^2} dt + \int_1^1 \frac{1}{1+t^2} dt = 0$,

θα έχουμε $F(x) = 0$, στο $(0, +\infty)$.

9. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι: $\int_0^x f(u)(x-u) du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t) dt \right) du$.

Απόδειξη:
$$\begin{aligned} \int_0^x \left(\int_0^u f(t) dt \right) du &= \int_0^x (u)' \left(\int_0^u f(t) dt \right) du = \left[u \int_0^u f(t) dt \right]_0^x - \int_0^x u \left(\int_0^u f(t) dt \right)' du = \\ &= x \int_0^x f(t) dt - 0 \cdot \left(\int_0^0 f(t) dt \right) - \int_0^x u f(u) du = \int_0^x x f(u) du - \int_0^x u f(u) du = \int_0^x (x f(u) - u f(u)) du = \\ &= \int_0^x f(u)(x-u) du, \text{ με δεδομένο ότι όλα τα παραπάνω «ορίζονται καλά» στο } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Σχόλια: (i) Υπάρχει μια διαφορετική απόδειξη στο «λυσάρι» του σχ. βιβλίου, την οποία αξίζει τον κόπο να μελετήσουμε. Εξάλλου την είδαμε και στο μάθημα.

(ii) Στη λύση που δώσαμε, πριν από κάθε μετατροπή, με προσοχή «βλέπαμε» τη μεταβλητή ολοκλήρωσης. Επίσης αξίζει να προσέξουμε στο τέλος, την αλλαγή ονόματος μεταβλητής ($t = u$).

(iii) Αν θα έπρεπε να υποστηρίξουμε «τον ορισμό», όλων των εμπλεκόμενων συναρτήσεων, θα έπρεπε να ονομάσουμε με προσοχή τις επιμέρους συναρτήσεις.

π.χ.: Ονομάζουμε F , τη συνάρτηση του πρώτου μέλους, της ισότητας που πρέπει να αποδείξουμε. Επειδή η f και η $h(u) = -u + x$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$,

επομένως και η $f \cdot h$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και συνεπώς η F ορίζεται στο $\mathbb{R}$ με:

$$F(x) = \int_0^x f(u)(x-u) du = \int_0^x (x f(u) - u f(u)) du = \int_0^x x f(u) du - \int_0^x u f(u) du = x \int_0^x f(u) du - \int_0^x u f(u) du.$$