

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

1. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int \ln x dx$.

Λύση: Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$, με $D_f = (0, +\infty)$, όπως είναι γνωστό, είναι συνεχής.

$$\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = \int (x)' \cdot \ln x dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot (\ln x)' dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln x - \int 1 dx = x \cdot \ln x - x + c$$

Οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = x$, είναι προφανώς παραγωγίσιμες στο $(0, +\infty)$.

Το σύνολο των παραγουσών της f στο $(0, +\infty)$, είναι $\int \ln x dx = x \cdot \ln x - x + c$, με $c \in \mathbb{R}$.

Σχόλιο: Αν μια συνάρτηση είναι **συνεχής** σε διάστημα Δ ,

τότε υπάρχει πάντα το αόριστο ολοκλήρωμά της στο Δ .

Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ , και όμως έχουν παράγουσα σε αυτό.

$$\text{➤ Η συνάρτηση } F(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases} \text{ είναι συνεχής στο } \mathbb{R}$$

$$\text{και «παράγει» τη συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} 2x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}, \text{ η οποία είναι ασυνεχής στο } x_0 = 0.$$

Εμείς θα ασχοληθούμε με το ολοκλήρωμα, συνεχών συναρτήσεων σε διάστημα Δ .

2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \eta\mu^2 x dx$, με δεδομένο ότι $\sigma\upsilon\nu 2x = 1 - 2\eta\mu^2 x$.

Λύση: Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu^2 x$ είναι **συνεχής** στο $\mathbb{R}$, όπως και η $g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$.

$$\int \eta\mu^2 x dx = \int \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{2} dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2} \right) dx = \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\eta\mu 2x}{4} + c, \text{ με } c \in \mathbb{R}.$$

Συμπλήρωμα: $\int \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \int 1 dx = \frac{1}{2} (x + c_1) = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} c_1 = \frac{x}{2} + c_2$

Για $u = 2x$ και $du = (2x)' dx = 2dx$:

$$\int \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2} dx = \int \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{4} 2dx = \int \frac{\sigma\upsilon\nu u}{4} du = \frac{1}{4} \int \sigma\upsilon\nu u du = \frac{1}{4} (\eta\mu u + c_3) = \frac{\eta\mu u}{4} + \frac{c_3}{4} = \frac{\eta\mu 2x}{4} + c_4$$

$$\text{Έτσι, } \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + c_2 - \left(\frac{\eta\mu 2x}{4} + c_4 \right) = \frac{x}{2} + c_2 - \frac{\eta\mu 2x}{4} - c_4 = \frac{x}{2} - \frac{\eta\mu 2x}{4} + c.$$

Σχόλιο: (1) Προφανώς, το συμπλήρωμα είναι μια «ακραία» εφαρμογή της θεωρίας.

(2) (Σχόλιο πιθανά «ανθυγιεινό») Η f έχει άπειρες, στο πλήθος, παράγουσες, μια για κάθε τιμή της $c \in \mathbb{R}$.

Η c_2 σαν συνάρτηση του c_1 , $c_2 = c_2(c_1) = \frac{c_1}{2}$, έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και επομένως **σύνολο τιμών** το $\mathbb{R}$.

Ομοίως, η $c_4(c_3) = \frac{c_3}{4}$, και για κάθε $c_4 \in \mathbb{R}$ η c σαν συνάρτηση του c_2 , $c = c(c_2) = c_2 - c_4$.

Έτσι, η c «δύναται να πάρει» οποιαδήποτε τιμή από το $\mathbb{R}$. (c : «σταθερά ολοκλήρωσης»)

(3) Μια άλλη λύση, ίσως όχι η καλύτερη στην περίπτωσή μας, χρήσιμη όμως για το μέλλον,

«θέλει να βάλουμε στο παιχνίδι» τη «συζυγή» παράσταση (με την ευρεία έννοια του όρου).

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Rightarrow \int (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x) dx = \int 1 dx \Leftrightarrow \boxed{\int \eta\mu^2 x dx + \int \sigma\upsilon\nu^2 x dx = x + c_1}$$

$$\text{και } \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x = \sigma\upsilon\nu 2x \Rightarrow \int (\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x) dx = \int \sigma\upsilon\nu 2x dx \Leftrightarrow \boxed{\int \sigma\upsilon\nu^2 x dx - \int \eta\mu^2 x dx = \frac{\eta\mu 2x}{2} + c_2}$$

$$\text{Λύνοντας το σύστημα: } \int \eta\mu^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\eta\mu 2x}{4} + c \text{ και } \int \sigma\upsilon\nu^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\eta\mu 2x}{4} + c$$

(4) Στο αόριστο ολοκλήρωμα, όταν χρησιμοποιούμε **βοηθητική μεταβλητή**,

θα πρέπει **στο τέλος** να επανερχόμαστε στην **αρχική μεταβλητή ολοκλήρωσης**.

και (iii) $\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} dx$, (iv) $\int \frac{3x-2}{x^2+6x+9} dx$.

Λύση: (i) Η $f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 3x + 2}$ με $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$ είναι συνεχής συνάρτηση.

$$\frac{x^3-4x}{x^2-3x+2} = \frac{x(x^2-4)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x^2+2x}{x-1} = x+3+\frac{3}{x-1},$$

$$\begin{array}{r|rrr} 1 & 2 & 0 & 1 \\ & 1 & 3 & \\ \hline 1 & 3 & 3 & \end{array}$$

$$\text{Ετστ}, \int \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 3x + 2} dx = \int \left(x + 3 + \frac{3}{x-1} \right) dx = \int (x+3) dx + 3 \int \frac{1}{x-1} dx = \frac{x^2}{2} + 3x + 3 \ln|x-1| + c,$$

εννοείται σε κάθε διάστημα του πεδίου ορισμού.

(ii) Η $f(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 3x + 2}$ με $D_f = (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, +\infty)$ είναι συνεχής συνάρτηση.

$$\frac{x^3 - 2x}{x^2 + 3x + 2} = x - 3 + \frac{5x + 6}{(x+1)(x+2)} = x - 3 + \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = x - 3 + \frac{A(x+2) + B(x+1)}{(x+1)(x+2)} =$$

$$= x - 3 + \frac{(A+B)x + (2A+B)}{(x+1)(x+2)}. \text{ Έτσι } 5x+6 = (A+B)x + (2A+B) \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=5 \\ 2A+B=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ \kappa\alpha\iota \ B=4 \end{cases}$$

$$\int \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 3x + 2} dx = \int \left(x - 3 + \frac{5x + 6}{(x+1)(x+2)} \right) dx = \int \left(x - 3 + \frac{1}{x+1} + \frac{4}{x+2} \right) dx = \int (x-3) dx + \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{4}{x+2} dx =$$

$$= \int (x-3)dx + \int \frac{1}{x+1}dx + 4 \int \frac{1}{x+2}dx = \frac{x^2}{2} - 3x + \ln|x+1| + 4\ln|x+2| + c,$$

εννοείται σε κάθε διάστημα του πεδίου ορισμού.

$$\begin{array}{l} \text{Συμπλήρωμα :} \\ \text{(Μπορούμε να} \\ \text{εργαστούμε} \\ \text{και με το} \\ \text{σχήμα \textbf{Horner})} \end{array} \quad \begin{array}{r} x^3 \qquad -2x \\ \underline{-x^3 - 3x^2 - 2x} \\ -3x^2 - 4x \\ \underline{+3x^2 + 9x + 6} \\ 5x + 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} \boxed{x^2 + 3x + 2} \\ x - 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} x^3 - 2x = (x^2 + 3x + 2)(x - 3) + 5x + 6 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 3x + 2} = x - 3 + \frac{5x + 6}{x^2 + 3x + 2} \end{array}$$

(iii) Η $f(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+3}$ με $D_f = \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση.

$$\text{Για } u = x^2 + 2x + 3 \text{ και } du = (x^2 + 2x + 3)' dx = (2x + 2) dx : \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 3} dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + c = \ln(x^2 + 2x + 3) + c, \text{ στο } \mathbb{R}.$$

(iv) Η $f(x) = \frac{3x-2}{x^2+6x+9}$ με $D_f = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$ είναι συνεχής συνάρτηση.

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-2}{x^2+6x+9} dx &= \int \frac{3(x+3)-11}{(x+3)^2} dx = \int \frac{3(x+3)}{(x+3)^2} dx - \int \frac{11}{(x+3)^2} dx = 3 \int \frac{1}{x+3} dx - 11 \int \frac{1}{(x+3)^2} dx \stackrel{u=x+3}{du=dx} \\ &= 3 \int \frac{1}{u} du - 11 \int \frac{1}{u^2} du = 3 \ln|u| - 11 \left(\frac{-1}{u} \right) + c \stackrel{u=x+3}{du=dx} = 3 \ln|x+3| + \frac{11}{x+3} + c \end{aligned}$$

Σχόλια: (1) Με τις γνώσεις που έχουμε, όταν η Διακρίνουσα του παρονομαστή είναι αρνητική, θα πρέπει, μετά τη διαίρεση, ο αριθμητής να είναι η παράγωγος του παρονομαστή επί μία, μη μηδενική, σταθερά .
(2) Όταν η διακρίνουσα του παρονομαστή είναι ίση με το 0, μετά τη διαίρεση, μετατρέπουμε τον αριθμητή σε πρωτοβάθμιο πολυώνυμο της βάσης του παρονομαστή.

4. Αν $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = -\frac{1}{x}$, να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $F(x) = \int_1^{g(x)} f(t)dt$.

Λύση: Η συνάρτηση $F(x) = \int_1^{g(x)} f(t)dt$, είναι $F(x) = (G \circ g)(x) = G(g(x))$ με $G(x) = \int_1^x f(t)dt$.

Επειδή $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και $1 \in (0, +\infty)$, επομένως $D_G = (0, +\infty)$.

$$\text{Έτσι, } x \in D_{G \circ g} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in D_g \\ \text{και } g(x) \in D_G \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \\ \text{και } -\frac{1}{x} > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \\ \text{και } x < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0),$$

δηλαδή $D_F = D_{G \circ g} = (-\infty, 0)$.

Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ με $g'(x) = \frac{1}{x^2}$ και η G είναι παραγωγίσιμη στο $g((-\infty, 0)) = (0, +\infty)$ με $G'(x) = f(x)$, επομένως η F είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ και θα έχουμε :

$$F'(x) = (G(g(x)))' = G'(g(x)) \cdot g'(x) = \underline{f(g(x))} \cdot g'(x) = f\left(\frac{-1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{-1} \cdot \frac{1}{x^2} = -x \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x}, \text{ στο } (-\infty, 0).$$

Συμπλήρωμα: Αφού $G(x) = \int_1^x f(t)dt$, άρα $G'(x) = f(x)$ και $g'(x) = \left(-\frac{1}{x}\right)' = (-x^{-1})' = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$.

Σχόλια: (1) Όταν λέμε να βρεθεί η παράγωγος μιας συνάρτησης, εννοούμε να βρεθεί όχι μόνο ο «τύπος», αλλά και το πεδίο ορισμού.

(2) Η $g(x) = -\frac{1}{x}$, όπως είναι γνωστό, δεν είναι μονότονη. Εξάλλου, το «εργαλείο» της g' για τη μονοτονία, αφορά διάστημα και όχι ένωση οποιονδήποτε διαστημάτων. (Εξαίρεση το Θεώρημα (iii), σελίδα 262)

(3) $G(x) = \ln x$ με $D_G = (0, +\infty)$, αφού $G(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_1^x \frac{1}{t}dt = [\ln t]_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x$.

5. Αν $f(x) = \int_0^{x-2} \frac{t}{e^t}dt$, να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f .

Λύση: Προφανώς $f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x))$ με $h(x) = x-2$, $D_h = \mathbb{R}$ και $g(x) = \int_0^x \frac{t}{e^t}dt$, $D_g = \mathbb{R}$.

Επειδή $D_g = \mathbb{R}$, θα έχουμε $D_f = D_h = \mathbb{R}$ και αφού $g'(x) = \frac{x}{e^x}$: $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \frac{x-2}{e^{x-2}}$ στο $\mathbb{R}$.

Επειδή, η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$, και για $x \in (-\infty, 2)$: $x < 2 \Rightarrow x-2 < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$, η f θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$, επίσης αφού για $x \in (2, +\infty)$: $x > 2 \Rightarrow x-2 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$, η f θα είναι γνησίως φθίνουσα αύξουσα στο $[2, +\infty)$ και έτσι, θα παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** το $f(2) = 0$.

6. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \epsilon \phi x dx$.

Λύση 1^η: Η συνάρτηση $f(x) = \epsilon \phi x$, είναι συνεχής στο $[\pi/6, \pi/3]$ και $\int \epsilon \phi x = -\ln|\sin x| + c$.

$$\int \epsilon \phi x = \int \frac{\eta \mu x}{\sin x} dx = \int \frac{-(\sin x)'}{\sin x} dx \stackrel{u=\sin x}{\substack{du=(\sin x)' dx}} = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + c \stackrel{u=\sin x}{=} -\ln|\sin x| + c$$

$$\text{Άρα, } \int_{\pi/6}^{\pi/3} \epsilon \phi x dx = \left[-\ln|\sin x| \right]_{\pi/6}^{\pi/3} = \left(-\ln\left|\sin \frac{\pi}{3}\right| \right) - \left(-\ln\left|\sin \frac{\pi}{6}\right| \right) = -\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{\sqrt{3}}{2} = \ln 2 + \ln \frac{\sqrt{3}}{2} = \ln \sqrt{3}.$$

Λύση 2^η: Για $u = \sin x$, $du = (\sin x)' dx = \eta \mu x dx \Leftrightarrow \eta \mu x dx = -du$ και $u_1 = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $u_2 = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \epsilon \phi x dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\eta \mu x}{\sin x} dx = \int_{u_1}^{u_2} \frac{-du}{u} = -\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{du}{u} = \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{du}{u} = \left[\ln|u| \right]_{1/2}^{\sqrt{3}/2} = \ln \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln \frac{1}{2} = \ln \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln 2 = \ln \sqrt{3}$$

7. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/2} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx$.

Λύση: Προφανώς, η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}$ είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Λύση 1^η: Θέτουμε $x = \frac{\pi}{2} - y$ και έχουμε $dx = \left(\frac{\pi}{2} - y\right)' dy = (-1) dy$.

Για $x_1 = 0$ έχουμε $y_1 = \frac{\pi}{2}$ και για $x_2 = \frac{\pi}{2}$ έχουμε $y_2 = 0$.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx = \int_{\pi/2}^0 \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - y\right)} (-1) dy = - \int_{\pi/2}^0 \frac{\sigma\upsilon\nu y}{\sigma\upsilon\nu y + \eta\mu y} dy = \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma\upsilon\nu y}{\eta\mu y + \sigma\upsilon\nu y} dy$$

$$\text{Έτσι, } \int_0^{\pi/2} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx \text{ και } 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx,$$

$$\text{δηλαδή } 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} \right) dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx = \int_0^{\pi/2} 1 dx = [x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{και συνεπώς } \int_0^{\pi/2} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Σχόλιο: Το $\int_0^{\pi/2} \frac{\sigma\upsilon\nu y}{\eta\mu y + \sigma\upsilon\nu y} dy$ είναι αριθμός και δεν εξαρτάται από το όνομα της μεταβλητής ολοκλήρωσης.

$$\text{Έτσι, } \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma\upsilon\nu y}{\eta\mu y + \sigma\upsilon\nu y} dy = \int_0^{\pi/2} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx, \text{ αφού αλλάξαμε απλά, όνομα μεταβλητής.}$$

Όταν **αλλάζουμε μεταβλητή**, δηλαδή όταν $x \neq y$, θα πρέπει να αλλάζουμε και τα **όρια ολοκλήρωσης**.

Λύση 2^η: Θα βρούμε το $I = \int \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx$ σε συνδυασμό με το «συζυγές» $J = \int \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx$.

$$I + J = \int \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx + \int \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx = \int \left(\frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} \right) dx = \int \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx = \int 1 dx = x + c_1$$

Για $u = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$, θα έχουμε $du = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)' dx = (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) dx$ και

$$J - I = \int \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx - \int \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx = \int \frac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x| + c_2$$

Έτσι, λύνοντας το σύστημα $\{I + J = x + c_1 \text{ και } J - I = \ln|\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x| + c_2\}$

$$\text{θα έχουμε } I = \int \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx = \frac{x}{2} - \frac{\ln|\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x|}{2} + c \text{ και } J = \int \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx = \frac{x}{2} + \frac{\ln|\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x|}{2} + c.$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\ln|\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x|}{2} \right]_0^{\pi/2} = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\ln\left|\eta\mu\frac{\pi}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\right|}{2} \right) - \left(\frac{0}{2} - \frac{\ln|\eta\mu 0 + \sigma\upsilon\nu 0|}{2} \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 1}{2} + \frac{\ln 1}{2} = \frac{\pi}{4}$$

8. Αν $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } -\pi \leq x \leq 0 \\ \eta\mu x, & \text{αν } 0 < x \leq \pi \end{cases}$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$.

Λύση: Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 = f(0)$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \eta\mu x = \eta\mu 0 = 0$,

επομένως η f είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$ και συνεπώς η f θα είναι συνεχής στο $[-\pi, \pi]$.

$$\text{Έτσι, } \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^0 x dx + \int_0^{\pi} \eta\mu x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^0 + [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} = -\frac{\pi^2}{2} + 1 + 1 = -\frac{\pi^2}{2} + 2.$$