

Ασκήσεις σχολικού βιβλίου (σελίδες 94 – 97)

A.1. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε ο $z = (\lambda + 3i)(2 - i)$ να είναι:

α) πραγματικός αριθμός β) φανταστικός αριθμός

Λύση: $z = (\lambda + 3i)(2 - i) = 2\lambda + 6i - \lambda i - 3i^2 = 2\lambda - 3(-1) + 6i - \lambda i = 2\lambda + 3 + (6 - \lambda)i$

Άρα $z = (2\lambda + 3) + (6 - \lambda)i$

και επομένως, $\operatorname{Re}(z) = 2\lambda + 3$ και $\operatorname{Im}(z) = 6 - \lambda$.

α) Για να είναι ο z πραγματικός αριθμός, «πρέπει και αρκεί» $\operatorname{Im}(z) = 0$,

δηλαδή $6 - \lambda = 0$ και συνεπώς $\lambda = 6$.

β) Για να είναι ο z φανταστικός αριθμός, «πρέπει και αρκεί» $\operatorname{Re}(z) = 0$,

δηλαδή $2\lambda + 3 = 0$, ισοδυνάμως $2\lambda = -3$ και συνεπώς $\lambda = \frac{-3}{2}$.

Σχόλια: (1) Για λόγους «οικονομίας»,

πρώτα φέρνω το μιγαδικό στη μορφή $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), και μετά αρχίζω να απαντώ.

(2) Η φράση «πρέπει και αρκεί», όπως και η λέξη **δηλαδή**,
δηλώνουν ισοδυναμία.

(3) Αν σας είναι εύκολο, μπορείτε να εκφράζεστε,
με μεγαλύτερη «δόση» Μαθηματικού συμβολισμού, όπως παρακάτω.

α) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow 6 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 6$.

β) $z \in \mathbb{I} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow 2\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = -3 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-3}{2}$.

Για το σύνολο $\mathbb{I}$ των φανταστικών αριθμών, ισχύει: $\mathbb{I} = \{ z \in \mathbb{C} \mid z = \beta i, \beta \in \mathbb{R} \}$,
δηλαδή φανταστικός αριθμός, είναι το γινόμενο πραγματικού αριθμού, με το i .

A.2.β Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x , για τον οποίο ισχύει:

$$\sqrt{3x^2 + x - 6} + (x^2 - 3)i = 2 + i$$

Πεδίο Ορισμού: $3x^2 + x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow \left\{ x \leq \frac{-1 - \sqrt{73}}{6} \quad \text{ή} \quad x \geq \frac{-1 + \sqrt{73}}{6} \right\}$

$$\sqrt{3x^2 + x - 6} + (x^2 - 3)i = 2 + i \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{3x^2 + x - 6} = 2 \\ \text{και} \\ x^2 - 3 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} * \\ \\ ** \end{array} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Για $x = 2$, η $\sqrt{3x^2 + x - 6} = 2$ «γίνεται» $\sqrt{3 \cdot 2^2 + 2 - 6} = 2$, δηλαδή $\sqrt{8} = 2$,
το οποίο είναι **λάθος**, και επομένως η $x = 2$ δεν είναι λύση του προβλήματος.

Για $x = -2$, η $\sqrt{3x^2 + x - 6} = 2$ «γίνεται» $\sqrt{3 \cdot (-2)^2 + (-2) - 6} = 2$,

δηλαδή $\sqrt{4} = 2$, το οποίο είναι **σωστό**,

και επομένως η $x = -2$ **είναι η λύση** του προβλήματος.

Σχόλια: (*) Αν κάποιος νιώθει ότι μπορεί με σιγουριά να λύνει **άρρητες** εξισώσεις,
εδώ θα μπορούσε να συνεχίσει με ισοδυναμία και να γλιτώσει τον έλεγχο.

Εμείς, επειδή είδαμε ότι μπορούμε εύκολα να λύσουμε τη δεύτερη εξίσωση,
προχωρήσαμε με συνεπαγωγή, γνωρίζοντας ότι αυτό μας υποχρεώνει να ελέγξουμε
ποιες από τις τελικές τιμές του x , είναι λύσεις του προβλήματος.

(**) Στη συνέχεια ισχύει ισοδυναμία, η καταγραφή της οποίας δεν μας προσφέρει
τίποτα, αφού η «αλυσίδα» των ισοδυναμιών έχει ήδη σπάσει στο (*)
και έτσι δε μπορώ να αποφύγω τον τελικό έλεγχο τιμών.

A.6 Να γράψετε τους παρακάτω μιγαδικούς στη μορφή $\alpha + \beta i$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$):

γ) $i^2 + 2i + 1$ ε) $\frac{3+i}{2-i}$

Λύση: γ) $i^2 + 2i + 1 = -1 + 2i + 1 = 0 + 2i$

ε) $\frac{3+i}{2-i} = \frac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{6+2i+3i+i^2}{2^2-i^2} = \frac{6+5i+(-1)}{4-(-1)} = \frac{5+5i}{5} = \frac{5(1+i)}{5} = 1+i$

A.7.α Να βρείτε τους $x, y \in \mathbb{R}$, για τους οποίους ισχύει: $(3-2i)^2 - (x+iy) = x-yi$

Λύση: $(3-2i)^2 - (x+iy) = x-yi \Leftrightarrow 3^2 + 2^2 i^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2i - x - yi = x + (-y)i \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 9 - 4 - 12i - x - yi = x + (-y)i \Leftrightarrow (5-x) + (-12-y)i = x + (-y)i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5-x=x \\ \text{και} \\ -12-y=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=5 \\ \text{και} \\ 0 \cdot y=12 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{Το σύστημα είναι προφανώς αδύνατο,} \\ \text{και συνεπώς δεν υπάρχει ζευγάρι } x, y \in \mathbb{R} \\ \text{λύση του προβλήματος.} \end{array} \right.$

A.8.β Να υπολογισθεί η παράσταση: $\frac{1}{i^{11}} - \frac{1}{i^{41}} + \frac{1}{i^{75}} - \frac{1}{i^{1023}}$

Λύση: $\frac{1}{i^{11}} - \frac{1}{i^{41}} + \frac{1}{i^{75}} - \frac{1}{i^{1023}} = \frac{1}{i^{4 \cdot 2 + 3}} - \frac{1}{i^{4 \cdot 10 + 1}} + \frac{1}{i^{4 \cdot 18 + 3}} - \frac{1}{i^{4 \cdot 255 + 3}} = \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^1} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^3} =$
 $= \frac{1}{-i} - \frac{1}{i} = \frac{2}{-i} = \frac{2i}{-i \cdot i} = \frac{2i}{-i^2} = 2i$

A.12 Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

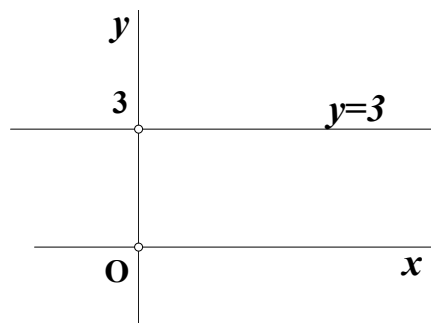
α) $z - \bar{z} = 6i$, β) $z^2 = \bar{z}^2$, γ) $\bar{z}^2 = -z^2$, δ) $\bar{z} = 2 - z$

Λύση: α) $z - \bar{z} = 6i$

$z - \bar{z} = 6i \stackrel{z=x+yi}{\Leftrightarrow}_{x,y \in \mathbb{R}} x + yi - (x - yi) = 6i \Leftrightarrow x + yi - x + yi = 6i \Leftrightarrow 2yi = 6i \Leftrightarrow y = 3$

Το σύνολο των εικόνων,
των μιγαδικών αριθμών z , που ικανοποιούν
τη σχέση $z - \bar{z} = 6i$,
είναι το **σύνολο** των **σημείων** της **ευθείας**,
που έχει **εξίσωση** $y = 3$.

Οι μιγαδικοί αριθμοί, που έχουν για εικόνες
τους τα σημεία της ευθείας $y = 3$,
έχουν τη μορφή $z = x + 3i$, ($x \in \mathbb{R}$)



β) $z^2 = \bar{z}^2$

$z^2 = \bar{z}^2 \stackrel{z=x+yi}{\Leftrightarrow}_{x,y \in \mathbb{R}} (x+yi)^2 = (x-yi)^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = x^2 - y^2 - 2xyi \Leftrightarrow 4xyi = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow xy = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ή} \\ y = 0 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{Το σύνολο των εικόνων,} \\ \text{των μιγαδικών που ικανοποιούν τη σχέση } z^2 = \bar{z}^2, \\ \text{είναι το σύνολο των σημείων, των αξόνων } xx' \text{ και } yy'. \end{array} \right.$

Οι μιγαδικοί αριθμοί,
που έχουν για εικόνες τους τα σημεία των ευθειών $y = 0$ και $x = 0$,
έχουν τη μορφή $z = x + 0i = x$, ($x \in \mathbb{R}$) και $z = 0 + yi = yi$, ($y \in \mathbb{R}$) αντίστοιχα.

γ) $\bar{z}^2 = -z^2$

$$\bar{z}^2 = -z^2 \stackrel{z=x+yi}{\Leftrightarrow} (x-yi)^2 = -(x+yi)^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 - 2xyi = -x^2 + y^2 - 2xyi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 2y^2 \Leftrightarrow y^2 = x^2 \Leftrightarrow y = \pm x$$

Το σύνολο των εικόνων, των μιγαδικών που ικανοποιούν τη σχέση $\bar{z}^2 = -z^2$, είναι το σύνολο των σημείων των διχοτόμων των τεταρτημορίων.

Οι μιγαδικοί αριθμοί,

που έχουν για εικόνες τους τα σημεία των ευθειών $y = x$ και $y = -x$,

έχουν τη μορφή $z = x + xi$ ($x \in \mathbb{R}$) και $z = x - xi$, ($x \in \mathbb{R}$) αντίστοιχα.

δ) $\bar{z} = 2 - z$

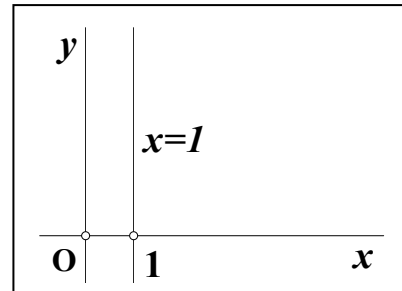
$$\bar{z} = 2 - z \stackrel{z=x+yi}{\Leftrightarrow} x - yi = 2 - (x + yi) \Leftrightarrow x - yi = 2 - x - yi \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

Το σύνολο των εικόνων, των μιγαδικών που ικανοποιούν τη σχέση $\bar{z} = 2 - z$, είναι το σύνολο των σημείων της ευθείας $x = 1$.

Οι μιγαδικοί αριθμοί,

που έχουν για εικόνες τους τα σημεία της ευθείας $x = 1$,

έχουν τη μορφή $z = 1 + yi$ ($y \in \mathbb{R}$).



Σχόλιο: Για να περιγράψουμε γεωμετρικά, το σύνολο των εικόνων μιγαδικών αριθμών z (Γεωμετρικό Τόπο), που ικανοποιούν κάποιες σχέσεις, χρειαζόμαστε τις εξισώσεις του.

Για να βρω τις εξισώσεις, αντικαθιστώ το z στις σχέσεις, με $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$).

A.13 Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών τις εξισώσεις:

α) $x^2 - 3x + 2 = 0$ β) $x^2 - 2x + 3 = 0$ γ) $x + \frac{1}{x} = 1$

Λύση: α) $x^2 - 3x + 2 = 0$

$\alpha = 1$	$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$	$x_1 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$
$\beta = -3$	$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2$	$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2}$	$x_2 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$
$\gamma = 2$	$\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$		

β) $x^2 - 2x + 3 = 0$

$\alpha = 1$	$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$	$x_1 = 1 + i\sqrt{2}$
$\beta = -2$	$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3$	$x = \frac{-(-2) \pm i\sqrt{8}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm i2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm i\sqrt{2}$	$x_2 = 1 - i\sqrt{2}$
$\gamma = 3$	$\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$		

γ) $x + \frac{1}{x} = 1$ Με πεδίο Ορισμού το $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$$x + \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 = x \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$$

$\alpha = 1$	$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$	$x_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$
$\beta = -1$	$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$	$x = \frac{-(-1) \pm i\sqrt{3}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$	$x_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$
$\gamma = 1$	$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$		

A.14 Αν μια ρίζα της εξίσωσης $2x^2 + \beta x + \gamma = 0$, όπου $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$,

είναι $3+2i$, να βρείτε τις τιμές των β και γ .

Λύση: Όταν, δευτεροβάθμια εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές,

έχει μη πραγματική λύση $3+2i$, θα έχει λύση και τη συζυγή της $3-2i$.

Έτσι για την $2x^2 + \beta x + \gamma = 0$, οι λύσεις είναι: $x_1 = 3+2i$ και $x_2 = 3-2i$.

$$x_1 + x_2 = 3+2i + 3-2i = 6 \quad \text{και} \quad x_1 \cdot x_2 = (3+2i)(3-2i) = 9+4 = 13$$

Όμως επειδή ισχύουν οι τύποι του Vieta, $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{2}$ και $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{2}$.

$$\text{Έτσι} \quad \left\{ \frac{-\beta}{2} = 6 \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{2} = 13 \right\} \Leftrightarrow \{ \beta = -12 \quad \text{και} \quad \gamma = 26 \}$$

B.5 Να λύσετε την εξίσωση: $\bar{z} = z^2$

$$\text{Λύση:} \quad \bar{z} = z^2 \stackrel{z=x+yi}{\Leftrightarrow}_{x,y \in \mathbb{R}} x - yi = (x + yi)^2 \Leftrightarrow x + (-y)i = x^2 - y^2 + 2xyi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = x^2 - y^2 \\ \text{και} \\ -y = 2xy \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = x^2 - y^2 \\ \text{και} \\ 2xy + y = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = x^2 - y^2 \\ \text{και} \\ y(2x+1) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = x^2 - y^2 \\ \text{και} \\ \left\{ \begin{array}{l} 2x+1=0 \\ \text{ή} \\ y=0 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = x^2 - y^2 \\ \text{και} \\ \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{-1}{2} \\ \text{ή} \\ y = 0 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{-1}{2} \\ \text{και} \\ y^2 = x^2 - x \end{array} \right\} \\ \text{ή} \\ \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ \text{και} \\ y^2 = x^2 - x \end{array} \right\} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{-1}{2} \\ \text{και} \\ y^2 = \frac{3}{4} \end{array} \right\} \\ \text{ή} \\ \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ \text{και} \\ x(x-1) = 0 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{-1}{2} \\ \text{και} \\ y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \\ \text{ή} \\ \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ \text{και} \\ \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \text{ή} \\ x = 1 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{-1}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \\ \text{ή} \\ \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{-1}{2} \quad \text{και} \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \\ \text{ή} \\ \{x=0 \quad \text{και} \quad y=0\} \\ \text{ή} \\ \{x=1 \quad \text{και} \quad y=0\} \end{array} \right\} \stackrel{z=x+yi}{\Leftrightarrow}_{x,y \in \mathbb{R}} \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{ή} \\ z = \frac{-1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{ή} \\ z = 0 \\ \text{ή} \\ z = 1 \end{array} \right\}$$

Σχόλιο: Ο συμβολισμός που χρησιμοποιήθηκε, είχε στόχο να αποκτήσουμε αντίληψη για τη δομή της λύσης, όταν συνδυάζονται το «ή» και το «και».