

Αξιοσημείωτα

1) Για $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\alpha + \beta i = \gamma + \delta i \Leftrightarrow \{\alpha = \gamma \text{ και } \beta = \delta\}$

Προφανώς ισχύει και $\alpha + \beta i \neq \gamma + \delta i \Leftrightarrow \{\alpha \neq \gamma \text{ ή } \beta \neq \delta\}$ «**Νόμος της αντιθετοαντιστροφής**».

Ομοίως, αφού ισχύει $\alpha + \beta i = 0 \Leftrightarrow \{\alpha = 0 \text{ και } \beta = 0\}$, θα ισχύει και $\alpha + \beta i \neq 0 \Leftrightarrow \{\alpha \neq 0 \text{ ή } \beta \neq 0\}$

2) Σύνολο φανταστικών αριθμών: $\mathbb{I} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \beta i, \beta \in \mathbb{R}\}$ Προφανώς $0 \in \mathbb{R} \cap \mathbb{I}$.

3) Για $z = \alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\boxed{z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}}$ και $\boxed{z = -\bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{I}}$

Απόδειξη: $z = \bar{z} \Leftrightarrow z - \bar{z} = 0 \stackrel{z=\alpha+\beta i}{\Leftrightarrow} \stackrel{\alpha, \beta \in \mathbb{R}}{2\beta i = 0} \Leftrightarrow \beta = 0 \stackrel{z=\alpha+\beta i}{\Leftrightarrow} \stackrel{\alpha, \beta \in \mathbb{R}}{\text{Im}(z) = 0} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
 $z = -\bar{z} \Leftrightarrow z + \bar{z} = 0 \stackrel{z=\alpha+\beta i}{\Leftrightarrow} \stackrel{\alpha, \beta \in \mathbb{R}}{2\alpha = 0} \Leftrightarrow \alpha = 0 \stackrel{z=\alpha+\beta i}{\Leftrightarrow} \stackrel{\alpha, \beta \in \mathbb{R}}{\text{Re}(z) = 0} \Leftrightarrow z \in \mathbb{I}.$

Συνέπειες: Για $\alpha \in \mathbb{R}$ έχουμε: $\bar{\alpha} = \alpha$ και $\overline{\alpha \cdot i} = -\alpha \cdot i$.

Προσοχή: Τα παραπάνω είναι άσκηση του σχολικού βιβλίου, και όποιος τα χρησιμοποιεί πρέπει να τα αποδεικνύει.

Άσκηση B.2 (σελίδα 101)

Έστω ο μιγαδικός αριθμός z , για τον οποίο ισχύει $z \neq -1$ και ο αριθμός $w = \frac{z-1}{z+1}$.

Να αποδείξετε ότι: Αν $|z|=1$, τότε ο w είναι φανταστικός και αντιστρόφως.

Απόδειξη: Αφού πρέπει να αποδείξουμε ότι «...τότε ... και αντιστρόφως»,

άρα πρέπει να αποδείξουμε ότι $|z|=1 \Leftrightarrow w \in \mathbb{I}$.

$$\begin{aligned} w \in \mathbb{I} &\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} w = -\bar{w} \Leftrightarrow \frac{z-1}{z+1} = -\overline{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)} \Leftrightarrow \frac{z-1}{z+1} = -\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} \Leftrightarrow \frac{z-1}{z+1} = -\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} \Leftrightarrow \\ &\stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \frac{z-1}{z+1} = -\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} \Leftrightarrow \frac{z-1}{z+1} = \frac{-\bar{z}+1}{\bar{z}+1} \Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}+1) = (z+1)(-\bar{z}+1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z\bar{z} - \cancel{z} + \cancel{1} - 1 = -z\bar{z} - \cancel{z} + \cancel{1} + 1 \Leftrightarrow 2z\bar{z} = 2 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \end{aligned}$$

$$(1) \quad w \in \mathbb{I} \Leftrightarrow \text{Re}(w) = 0 \stackrel{w=\alpha+\beta i}{\Leftrightarrow} \stackrel{\alpha, \beta \in \mathbb{R}}{\alpha = 0} \Leftrightarrow 2\alpha = 0 \stackrel{w=\alpha+\beta i}{\Leftrightarrow} \stackrel{\alpha, \beta \in \mathbb{R}}{w + \bar{w} = 0} \Leftrightarrow w = -\bar{w}$$

$$(2) \quad \text{Αφού } z \neq -1, \text{ άρα και } \bar{z} \neq -1, \text{ γιατί αν } \bar{z} = -1, \text{ τότε και } z = \bar{\bar{z}} = \overline{-1} = -1.$$

ΑΤΟΠΟ αφού έχουμε υποθέσει ότι $z \neq -1$.

$$4) \quad \boxed{|z|^2 = z^2 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}} \quad \text{και} \quad \boxed{|z|^2 = -z^2 \Leftrightarrow z \in \mathbb{I}}$$

Απόδειξη:

$$|z|^2 = z^2 \Leftrightarrow z\bar{z} = z^2 \Leftrightarrow z^2 - z\bar{z} = 0 \Leftrightarrow z(z - \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \text{ή} \\ z - \bar{z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \text{ή} \\ z = \bar{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \text{ή} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

$$|z|^2 = -z^2 \Leftrightarrow z\bar{z} = -z^2 \Leftrightarrow z^2 + z\bar{z} = 0 \Leftrightarrow z(z + \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \text{ή} \\ z + \bar{z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \text{ή} \\ z = -\bar{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \text{ή} \\ z \in \mathbb{I} \end{cases} \Leftrightarrow z \in \mathbb{I}$$

$$5) \quad |z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}| = |i \cdot z| = |i \cdot \bar{z}| = |-i \cdot z| = |-i \cdot \bar{z}| \quad \boxed{|i| = |-i| = 1}$$

Απόδειξη: $|i \cdot z| = |i||z| = 1 \cdot |z| = |z|$ και ομοίως τα υπόλοιπα.

6) Για τις διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών, ισχύουν όλες οι ιδιότητες των διανυσμάτων.

Προσοχή: Το γινόμενο μιγαδικών, δεν αντιστοιχεί στο «εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων».

7) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

Απόδειξη: $|z| = 0 \Leftrightarrow |z|^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0 \Leftrightarrow z = 0$
 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Προσοχή: Η $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$ που ισχύει για $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, δεν επεκτείνεται στο $\mathbb{C}$.

π.χ.: $i^2 + 1^2 = -1 + 1 = 0$, ενώ $i \neq 0$ και $1 \neq 0$.

8) $|z| = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{z} = \bar{z}$

Απόδειξη: $|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{z} = \bar{z}$

9) $i \cdot z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{I}$ και $i \cdot z \in \mathbb{I} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Απόδειξη: $i \cdot z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow i \cdot (\alpha + \beta i) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (-\beta + \alpha i) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha = 0 \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{I}$
 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$i \cdot z \in \mathbb{I} \Leftrightarrow i \cdot (\alpha + \beta i) \in \mathbb{I} \Leftrightarrow (-\beta + \alpha i) \in \mathbb{I} \Leftrightarrow \beta = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

10) $z^2 = \bar{z}^2 \Leftrightarrow \{z \in \mathbb{R} \text{ ή } z \in \mathbb{I}\}$

Απόδειξη: $z^2 = \bar{z}^2 \Leftrightarrow (\alpha + \beta i)^2 = (\alpha - \beta i)^2 \Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i = \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta i \Leftrightarrow 4\alpha\beta i = 0 \Leftrightarrow$
 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \{\alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0\} \Leftrightarrow \{\text{Re}(z) = 0 \text{ ή } \text{Im}(z) = 0\} \Leftrightarrow \{z \in \mathbb{I} \text{ ή } z \in \mathbb{R}\}$
 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

11) Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $z_1 = \alpha + \beta i$, $z_2 = \gamma + \delta i \neq 0$

και $\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}$ οι διανυσματικές ακτίνες των z_1, z_2 αντίστοιχα, τότε:

$\left\{ \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i} \in \mathbb{R} \right\} \Leftrightarrow \left| \frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i} \right| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OM_1} \parallel \overrightarrow{OM_2}$

$\frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i} = \frac{(\alpha + \beta i)(\gamma - \delta i)}{(\gamma + \delta i)(\gamma - \delta i)} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta + (\beta\gamma - \alpha\delta)i}{\gamma^2 + \delta^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \beta\gamma - \alpha\delta = 0 \Leftrightarrow \left| \frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i} \right| = 0$

12) Για $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ προφανώς ισχύουν: (1) $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^v = \beta^v$ ($v \in \mathbb{N}^*$) και (2) $\alpha = \beta \Rightarrow |\alpha| = |\beta|$

Προσοχή: Δεν μπορούμε να γενικεύσουμε τα αντίστροφα.

(1) Στο $\mathbb{R}$ ισχύει: $\alpha^v = \beta^v \Rightarrow \alpha = \beta$, με $v = 2\kappa + 1$ ($\kappa \in \mathbb{N}$).

Αυτό δεν επεκτείνεται στο $\mathbb{C}$. π.χ.: $\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3 \stackrel{\text{εξίσωση II}}{=} 1 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3$, ενώ $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \neq -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

(2) Όλοι οι μιγαδικοί, που «βρίσκουν» την εικόνα τους πάνω στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=3$, έχουν το ίδιο μέτρο, ίσο με 3, και όμως δεν είναι ίσοι.

13) Για $z = \alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\frac{z + \bar{z}}{2} = \alpha = \text{Re}(z)$ και $\frac{z - \bar{z}}{2i} = \beta = \text{Im}(z)$

14) Η σχέση διάταξης που ισχύει στο $\mathbb{R}$, δεν επεκτείνεται στο $\mathbb{C}$.

Έτσι αν $z_1 \geq z_2$, τότε $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$.

Εξισώσεις - Συστήματα

Όταν λέμε να λυθεί η εξίσωση,
εννοούμε να λυθεί στο ευρύτερο σύνολο αριθμών που γνωρίζουμε, και τώρα είναι το $\mathbb{C}$.
Σε κάθε άλλη περίπτωση θα λέμε **να λυθεί στο ...** (π.χ.: **να λυθεί στο $\mathbb{R}$**)

I. Να λυθεί η εξίσωση: $z = 1 + (z+1)i$

Λύση: $z = 1 + (z+1)i \Leftrightarrow z = 1 + zi + i \Leftrightarrow z - zi = 1 + i \Leftrightarrow z(1-i) = 1+i \Leftrightarrow z = \frac{1+i}{1-i} \Leftrightarrow z = i$

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1^2 + i^2 + 2i}{1^2 - i^2} = \frac{1-1+2i}{1+1} = \frac{2i}{2} = i$$

II. Να λυθεί η εξίσωση: $z^3 = 1$

Λύση: $z^3 = 1 \Leftrightarrow z^3 - 1^3 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2 + z + 1) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} z-1=0 \\ \text{ή} \\ z^2 + z + 1 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} z=1 \\ \text{ή} \\ z = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\}$

III. Αν ο $z_1 = 2 + 3i$ είναι λύση της εξίσωσης $\alpha \cdot z^2 + \gamma = 4 \cdot z$, να βρεθούν οι $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$.

Λύση: Για $\alpha=0$, η $\alpha \cdot z^2 + \gamma = 4 \cdot z \Leftrightarrow z = \frac{\gamma}{4}$, έχει μοναδική λύση $\frac{\gamma}{4} \in \mathbb{R}$, προφανώς διάφορη του z_1 .

Άρα, αν το πρόβλημά μας έχει λύση, θα έχει για $\alpha \neq 0$.

Για $\alpha \neq 0$, η εξίσωσή μας, $\alpha \cdot z^2 + \gamma = 4 \cdot z \Leftrightarrow \alpha \cdot z^2 - 4 \cdot z + \gamma = 0$, είναι δευτέρου βαθμού με **πραγματικούς** συντελεστές, και επομένως αν έχει λύση $z_1 = 2 + 3i$, θα έχει λύση και τη συζυγή της $z_2 = 2 - 3i$.

Για $\beta = -4$, θα έχουμε $\boxed{z_1 + z_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = \frac{4}{\alpha} \quad \text{και} \quad z_1 \cdot z_2 = \frac{\gamma}{\alpha}}$.

Όμως $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (2 - 3i) = 4$ και $z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i) \cdot (2 - 3i) = 4 + 9 = 13$.

Έτσι $\left\{ \frac{4}{\alpha} = 4 \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{\alpha} = 13 \right\} \Leftrightarrow \{ \alpha = 1 \quad \text{και} \quad \gamma = 13 \}$.

IV. Να λυθεί το σύστημα $\left\{ \begin{array}{c} ix + 2y = 1 \\ \text{και} \\ 2x - iy = i \end{array} \right\}$

Λύση: $D = \begin{vmatrix} i & 2 \\ 2 & -i \end{vmatrix} = -i^2 - 4 = 1 - 4 = -3 \neq 0$ και συνεπώς το σύστημα έχει μία μοναδική λύση.

Επειδή $D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ i & -i \end{vmatrix} = -i - 2i = -3i$ και $D_y = \begin{vmatrix} i & 1 \\ 2 & i \end{vmatrix} = i^2 - 2 = -3$

άρα $\left\{ \begin{array}{c} ix + 2y = 1 \\ \text{και} \\ 2x - iy = i \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{D_x}{D} = \frac{-3i}{-3} = i \\ \text{και} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{-3}{-3} = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = i \\ \text{και} \\ y = 1 \end{array} \right\}.$

Σημείωση: Ασφαλώς, όλες οι μέθοδοι επίλυσης γραμμικού συστήματος,
δύο εξισώσεων με δύο άγνωστους, μπορούν να εφαρμοστούν.

V. Να λυθεί η εξίσωση $\bar{z}^2 + |z| = 0$.

Λύση: (1^n) $\bar{z}^2 + |z| = 0 \stackrel{z=x+yi}{\Leftrightarrow}_{x,y \in \mathbb{R}} (x-yi)^2 + \sqrt{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 - 2xyi + \sqrt{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x^2 - y^2 + \sqrt{x^2+y^2} = 0 \\ \text{και} \\ xy = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x^2 - y^2 + \sqrt{x^2+y^2} = 0 \\ \text{και} \\ \{ x=0 \text{ ή } y=0 \} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \left\{ x=0 \text{ και } x^2 - y^2 + \sqrt{x^2+y^2} = 0 \right\} \\ \text{ή} \\ \left\{ y=0 \text{ και } x^2 - y^2 + \sqrt{x^2+y^2} = 0 \right\} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \left\{ x=0 \text{ και } -y^2 + \sqrt{y^2} = 0 \right\} \\ \text{ή} \\ \left\{ y=0 \text{ και } x^2 + \sqrt{x^2} = 0 \right\} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \left\{ x=0 \text{ και } |y|^2 - |y| = 0 \right\} \\ \text{ή} \\ \left\{ y=0 \text{ και } |x|^2 + |x| = 0 \right\} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \left\{ x=0 \text{ και } |y|(|y|-1) = 0 \right\} \\ \text{ή} \\ \left\{ y=0 \text{ και } |x|(|x|+1) = 0 \right\} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \left\{ x=0 \text{ και } \{ |y|=0 \text{ ή } |y|=1 \} \right\} \\ \text{ή} \\ \left\{ y=0 \text{ και } \{ |x|=0 \text{ ή } |x|=-1 \} \right\} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \{ x=0 \text{ και } y=0 \} \text{ ή } \{ x=0 \text{ και } y=\pm 1 \} \\ \text{ή} \\ \{ y=0 \text{ και } x=0 \} \text{ ή } \{ y=0 \text{ και } |x|=-1 \} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \{ x=0 \text{ και } y=0 \} \\ \text{ή } \{ x=0 \text{ και } y=1 \} \\ \text{ή } \{ x=0 \text{ και } y=-1 \} \end{array} \right\} \stackrel{z=x+yi}{\Leftrightarrow}_{x,y \in \mathbb{R}} \left\{ \begin{array}{c} z=0 \\ \text{ή } z=i \\ \text{ή } z=-i \end{array} \right\}$$

(2^n) $\bar{z}^2 + |z| = 0 \Leftrightarrow |z| = -\bar{z}^2 \Rightarrow \|z\| = |-\bar{z}^2| \Rightarrow |z| = |\bar{z}^2| \Rightarrow |z| = |\bar{z}|^2 \Rightarrow |z| = |z|^2 \Rightarrow |z|^2 - |z| = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow |z|(|z|-1) = 0 \Rightarrow \{ |z|=0 \text{ ή } |z|=1 \}$

Για $|z|=0$: $\left\{ \begin{array}{c} \bar{z}^2 + |z| = 0 \\ \text{και } |z|=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{z}^2 = 0 \Rightarrow z=0$ Η $z_1=0$ είναι λύση, αφού προφανώς επαληθεύει τη $\bar{z}^2 + |z| = 0$.

Για $|z|=1$: $\left\{ \begin{array}{c} \bar{z}^2 + |z| = 0 \\ \text{και } |z|=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{z}^2 = -1 \Rightarrow \bar{z} = \pm i \Rightarrow z = \mp i$ Η $z_2=i$ και η $z_3=-i$ είναι λύσεις, αφού προφανώς επαληθεύουν τη $\bar{z}^2 + |z| = 0$.

(3^n) $\bar{z}^2 + |z| = 0 \Rightarrow \bar{z}^2 = -|z| \Rightarrow \bar{z} = \pm i\sqrt{|z|} \Rightarrow z = \mp i\sqrt{|z|} \Rightarrow z \in \mathbb{I} \Rightarrow \{ z = yi, y \in \mathbb{R} \}$

$\bar{z}^2 + |z| = 0 \stackrel{z=yi}{\Leftrightarrow}_{y \in \mathbb{R}} (-yi)^2 + |yi| = 0 \Leftrightarrow -y^2 + |y| = 0 \Leftrightarrow |y|^2 - |y| = 0 \Leftrightarrow |y|(|y|-1) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} |y|=0 \\ \text{ή } |y|=1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{ y=0 \text{ ή } y=\pm 1 \} \stackrel{z=yi}{\Leftrightarrow}_{y \in \mathbb{R}} \{ z=0 \text{ ή } z=i \text{ ή } z=-i \}$

VI. Αν $z = |-\bar{z}| - 1 + |1 - 2i|i$, να βρεθεί το $|z|$.

Λύση: (1^n) $z = |-\bar{z}| - 1 + |1 - 2i|i \Rightarrow z = |z| - 1 + i\sqrt{5} \Rightarrow |z| = ||z| - 1 + i\sqrt{5}| \Rightarrow |z|^2 = ||z| - 1 + i\sqrt{5}|^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow |z|^2 = (|z| - 1)^2 + (\sqrt{5})^2 \Rightarrow |z|^2 = |z|^2 - 2|z| + 1 + 5 \Rightarrow 2|z| = 6 \Rightarrow |z| = 3$

(2^n) $z = |-\bar{z}| - 1 + |1 - 2i|i \stackrel{z=x+yi}{\Rightarrow}_{x,y \in \mathbb{R}} x + yi = |-x - yi| - 1 + i\sqrt{5} \Rightarrow x + yi = \sqrt{x^2 + y^2} - 1 + i\sqrt{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{ x = \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \text{ και } y = \sqrt{5} \right\} \Rightarrow \left\{ x + 1 = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ και } y = \sqrt{5} \right\} \stackrel{x \geq -1}{\Rightarrow} \left\{ (x+1)^2 = x^2 + 5 \text{ και } y = \sqrt{5} \right\} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \{ x^2 + 2x + 1 = x^2 + 5 \text{ και } y = \sqrt{5} \} \Rightarrow \{ 2x = 4 \text{ και } y = \sqrt{5} \} \Rightarrow \{ x = 2 \text{ και } y = \sqrt{5} \} \stackrel{z=x+yi}{\Rightarrow}_{x,y \in \mathbb{R}} |z| = 3.$