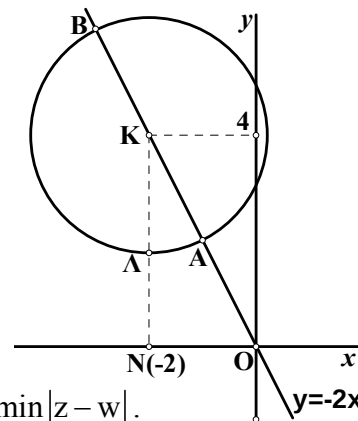


Γεωμετρικοί Τόποι (Γ.Τ.)



1. (I) Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z + 2 - 4i| = \sqrt{5}$, να βρεθούν:

(α) Ο Γ.Τ. των σημείων $M(z)$.

(β) Οι z_1, z_2 για τους οποίους $|z_1| = \min|z|$ και $|z_2| = \max|z|$.

(γ) Τα $|z_1| = \min|z|$ και $|z_2| = \max|z|$.

(II) Αν για τον w ισχύει $|w|^2 = w^2$, να βρεθεί ο Γ.Τ. των $N(w)$, και το $\min|z - w|$.

Λύση: (I) $|z + 2 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |z - (-2 + 4i)| = \sqrt{5}$ και συνεπώς επαληθεύεται,

από όλους τους μιγαδικούς z που έχουν την ιδιότητα, οι εικόνες τους $M(z)$

να απέχουν από το σημείο $K(-2, 4)$ σταθερή απόσταση ίση με $\sqrt{5}$, και μόνο από αυτούς.

(α) Επομένως ο ζητούμενος Γ.Τ. είναι κύκλος με κέντρο $K(-2, 4)$

και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$, δηλαδή ο κύκλος με εξίσωση $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = (\sqrt{5})^2$.

(β) Επειδή, τα $\min|z|$ και $\max|z|$ είναι τα (OA) και (OB) αντίστοιχα,

επομένως οι z_1, z_2 έχουν για εικόνες τους τα σημεία A και B αντίστοιχα.

Στο σχήμα, A και B , είναι τα κοινά σημεία της ευθείας OK και του κύκλου.

Η ευθεία OK έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{4}{-2} = -2$,

και επειδή διέρχεται από το $O(0, 0)$ έχει εξίσωση $y = -2x$.

$$\left\{ \begin{array}{l} (x+2)^2 + (y-4)^2 = 5 \\ \text{και} \\ y = -2x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x+2)^2 + (-2x-4)^2 = 5 \\ \text{και} \\ y = -2x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5x^2 + 20x + 15 = 0 \\ \text{και} \\ y = -2x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 4x + 3 = 0 \\ \text{και} \\ y = -2x \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{x = -1 \text{ ή } x = -3\} \\ \text{και} \\ y = -2x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{x = -1 \text{ και } y = -2x\} \\ \text{ή} \\ \{x = -3 \text{ και } y = -2x\} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{x = -1 \text{ και } y = 2\} \\ \text{ή} \\ \{x = -3 \text{ και } y = 6\} \end{array} \right\}$$

Άρα τα $A(-1, 2)$ και $B(-3, 6)$ είναι τα κοινά σημεία του κύκλου (K, ρ) και της ευθείας OK , και συνεπώς $z_1 = -1 + 2i$ και $z_2 = -3 + 6i$.

(γ) $|z_1| = \min|z| = (OA) = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ και $|z_2| = \max|z| = (OB) = \sqrt{(-3)^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

(II) $|w|^2 = w^2 \Leftrightarrow w \in \mathbb{R}$ και επομένως ο Γ.Τ. των $N(w)$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = 0$.

Η ελάχιστη απόσταση σημείων των δύο Γ.Τ., είναι προφανώς $\min|z - w| = (AN) = (KN) - \rho = 4 - \sqrt{5}$

Σχόλια: (i) $|z_1|$, είναι η απόσταση της εικόνας του z_1 από την αρχή,

και επειδή η εικόνα του z_1 είναι το σημείο A , έτσι $|z_1| = (OA)$.

(ii) Το σχήμα δεν είναι υποχρεωτικό, όμως έστω και πρόχειρο, είναι πολύ χρήσιμο.

(iii) Αν έλειπε το «ερώτημα» (β), θα μπορούσαμε να αποφύγουμε τη λύση του συστήματος.

Στο «θέμα», να βρεθούν τα $|z_1| = \min|z|$ και $|z_2| = \max|z|$,

θα μπορούσαμε χρησιμοποιώντας το σχήμα, να παρατηρήσουμε ότι:

Αφού η ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$, $|z_1| = \min|z| = (OA) = (OK) - \rho = 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}$

και $|z_2| = \max|z| = (OB) = (OK) + \rho = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$.

* Αφού $K(-2, 4)$, άρα $(OK) = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.

(iv) $\min|z|$ είναι η ελάχιστη τιμή μέτρου, του μιγαδικού z και $\max|z|$ η μέγιστη.

2. Αν για τους μιγαδικούς z και w ισχύουν αντίστοιχα $|z-1-i|=1$ και $|w+2-5i|=2$, να βρεθούν:

(α) Οι Γ.Τ. των σημείων $M(z)$ και $N(w)$.

(β) Τα $\min|z-w|$ και $\max|z-w|$.

Λύση: (α) $|z-1-i|=1 \Leftrightarrow |z-(1+i)|=1$ και συνεπώς

επαληθεύεται **από όλους** τους μιγαδικούς z που έχουν την ιδιότητα, οι εικόνες τους $M(z)$, να απέχουν από το σημείο $\Lambda(1,1)$ σταθερή απόσταση ίση με 1 **και μόνο από αυτούς**.

Επομένως ο ζητούμενος Γ.Τ. είναι κύκλος με κέντρο $\Lambda(1,1)$ και ακτίνα $\rho=1$, δηλαδή ο κύκλος με εξίσωση $(x-1)^2+(y-1)^2=1^2$.

$|w+2-5i|=2 \Leftrightarrow |w-(-2+5i)|=2$ και συνεπώς επαληθεύεται

από όλους τους μιγαδικούς w που έχουν την ιδιότητα, οι εικόνες τους $N(w)$, να απέχουν από το σημείο $K(-2,5)$ σταθερή απόσταση ίση με 2 **και μόνο από αυτούς**.

Επομένως ο ζητούμενος Γ.Τ. είναι κύκλος με κέντρο $K(-2,5)$ και ακτίνα $R=2$, δηλαδή ο κύκλος με εξίσωση $(x+2)^2+(y-5)^2=2^2$.

(β) Η διάκεντρος δ των δύο κύκλων, είναι $\delta=(\Lambda K)=\sqrt{(-2-1)^2+(5-1)^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$.

Επειδή $R+\rho=2+1=3<5=\delta$, οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) βρίσκονται ο ένας στο εξωτερικό του άλλου.

Άρα $\min|z-w|=(B\Gamma)=(\Lambda K)-R-\rho=5-2-1=2$ και $\max|z-w|=(A\Delta)=(\Lambda K)+R+\rho=8$.

Σημείωση: $\min|z-w|$, είναι η **ελάχιστη** απόσταση ανάμεσα σε σημεία του ενός Γ.Τ. και του άλλου.

3. Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z-2|^2+|z+2|^2=4^2$,

να βρεθεί ο Γ.Τ. των σημείων $M(z)$.

Λύση: $|z-2|^2+|z+2|^2=16 \Leftrightarrow (z-2)(\overline{z-2})+(z+2)(\overline{z+2})=16 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (z-2)(\overline{z}-2)+(z+2)(\overline{z}+2)=16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\overline{z}-2\overline{z}-2z+4+z\overline{z}+2\overline{z}+2z+4=16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2z\overline{z}=8 \Leftrightarrow z\overline{z}=4 \Leftrightarrow |z|^2=4 \Leftrightarrow |z|=2$$

Επομένως ο Γ.Τ. των $M(z)$, είναι κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=2$.

Γεωμετρικά: Αν $M(z)$ η εικόνα του μιγαδικού z τότε: $|z-2|^2+|z+2|^2=4^2 \Leftrightarrow (MB)^2+(MA)^2=(AB)^2$

Τα A, B είναι σημεία του Γ.Τ., γιατί αν $M \equiv A$ ή $M \equiv B$, τότε $(MB)^2+(MA)^2=(AB)^2 \Leftrightarrow (AB)^2=(AB)^2$.

Αν $M(z)$ σημείο του κύκλου, διαφορετικό των A και B , τότε προφανώς στο ορθογώνιο τρίγωνο MAB , ισχύει $(MB)^2+(MA)^2=(AB)^2$ και επομένως **το $M(z)$ ανήκει στον Γ.Τ.**

Αν $M(z)$ σημείο της ευθείας AB , εκτός του ευθυγράμμου τμήματος AB , τότε το AB περιέχεται είτε στο MA είτε στο MB , και συνεπώς $(MB)^2+(MA)^2 > (AB)^2$. Άρα τα σημεία αυτά δεν ανήκουν στο Γ.Τ..

Αν $M(z)$ σημείο εσωτερικό του AB , τότε $MA=\lambda \cdot AB$ και $MB=(1-\lambda)AB$ με $0 < \lambda < 1$, και συνεπώς $(MB)^2+(MA)^2=[1-2\lambda(1-\lambda)](AB)^2 < (AB)^2$. Άρα τα σημεία αυτά δεν ανήκουν στο Γ.Τ..

Για τα υπόλοιπα σημεία, δηλαδή τα σημεία που δεν ανήκουν στον κύκλο ή στην ευθεία AB :

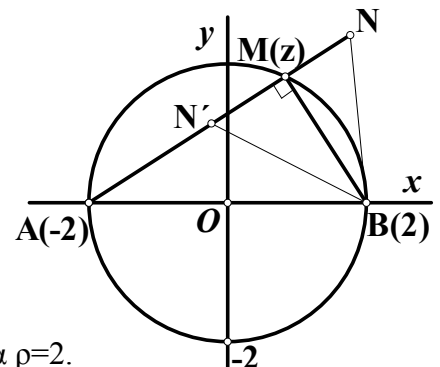
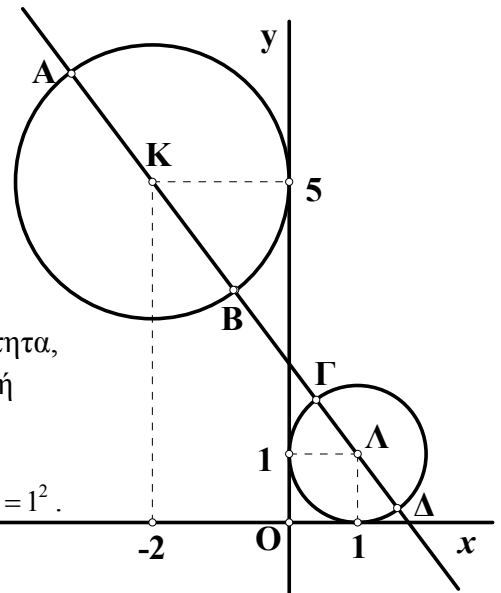
Αν $N(z)$ σημείο στο εξωτερικό του κύκλου, τότε $\widehat{MNB} < \widehat{AMB} = 90^\circ$, άρα $(NB)^2+(NA)^2 > (AB)^2$

και ισοδυνάμως $|z-2|^2+|z+2|^2 > 4^2$ με συνέπεια το N να μην είναι σημείο του τόπου.

Αν $N'(z)$ σημείο στο εσωτερικό του κύκλου, τότε $\widehat{A'N'B} > \widehat{AMB} = 90^\circ$, άρα $(N'B)^2+(N'A)^2 < (AB)^2$

και ισοδυνάμως $|z-2|^2+|z+2|^2 < 4^2$ με συνέπεια το N' να μην είναι σημείο του τόπου.

Άρα **τα σημεία του κύκλου $(O,2)$, και μόνο αυτά**, είναι σημεία του Γεωμετρικού Τόπου.



4. (I) Αν για το μιγαδικό Z ισχύει $|z - 2 - 4i| = |z - 6 + 4i|$, να βρεθούν:

(α) Ο Γ.Τ. των σημείων $M(Z)$.

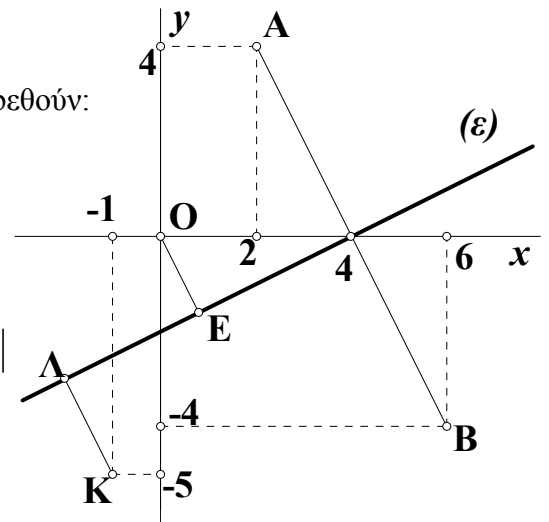
(β) Τα $\min|z|$ και $\min|z + 1 + 5i|$.

(II) Αν για το μιγαδικό Z ισχύει $|z - 2 - 4i| \leq |z - 6 + 4i|$

να βρεθεί ο Γ.Τ. των σημείων $M(Z)$.

Λύση: (I) $|z - 2 - 4i| = |z - 6 + 4i| \Leftrightarrow |z - (2 + 4i)| = |z - (6 - 4i)|$

(α) Η εξίσωσή μας, επαληθεύεται μόνο από τους μιγαδικούς z , που έχουν την ιδιότητα, οι εικόνες τους να ισαπέχουν, από τα σημεία $A(2 + 4i)$ και $B(6 - 4i)$.



Έτσι ο Γ.Τ. των σημείων $M(Z)$, είναι η μεσοκάθετος (ε) του ευθυγράμμου τμήματος AB .

$$\begin{aligned} |z - 2 - 4i| &= |z - 6 + 4i| \Leftrightarrow |x + yi - 2 - 4i| = |x + yi - 6 + 4i| \Leftrightarrow |(x - 2) + (y - 4)i|^2 = |(x - 6) + (y + 4)i|^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = (x - 6)^2 + (y + 4)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 12x + 36 + y^2 + 8y + 16 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 8x - 16y - 32 = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 4 = 0 \end{aligned}$$

Επομένως η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι $x - 2y - 4 = 0$.

(β) Το $\min|z|$ είναι η **ελάχιστη** τιμή μέτρου, του μιγαδικού z και συνεπώς είναι η απόσταση της

αρχής O από την (ε) , δηλαδή το (OE) . $\min|z| = (OE) = d(O, \varepsilon) = \frac{|1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

Το $\min|z + 1 + 5i|$, δηλαδή το $\min|z - (-1 - 5i)|$, είναι η **ελάχιστη** απόσταση σημείου της (ε) από το σημείο $K(-1 - 5i)$ και επομένως είναι η απόσταση του K από την (ε) , δηλαδή το $(K\Lambda)$.

$$\min|z + 1 + 5i| = (K\Lambda) = d(K, \varepsilon) = \frac{|1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-5) - 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

(II) Αν για το μιγαδικό Z ισχύει $|z - 2 - 4i| \leq |z - 6 + 4i|$,

τότε η απόσταση της εικόνας του Z από το $A(2 + 4i)$, δηλαδή το $|z - (2 + 4i)|$,

είναι μικρότερη ή ίση από το $|z - (6 - 4i)|$, που είναι η απόσταση της εικόνας του Z από το $B(6 - 4i)$,

και επομένως, ο Γ.Τ. των σημείων $M(Z)$,

είναι το **ημιεπίπεδο** που ορίζεται από την ευθεία (ε) : $x - 2y - 4 = 0$ και περιέχει το σημείο $A(2 + 4i)$.

Σχόλιο: Αν για το μιγαδικό Z ισχύει $|z - 2 - 4i| < |z - 6 + 4i|$, τότε ο Γ.Τ. των σημείων $M(Z)$,

είναι το **ημιεπίπεδο** που ορίζεται από την ευθεία (ε) : $x - 2y - 4 = 0$ και περιέχει το σημείο $A(2 + 4i)$,

χωρίς την ευθεία (ε) .

5. Αν για το μιγαδικό Z ισχύει $|iz - 2| = 4$ να βρεθεί ο Γ.Τ. των σημείων $M(Z)$.

Λύση: $|iz - 2| = 4 \Leftrightarrow \left| i \left(z - \frac{2}{i} \right) \right| = 4 \Leftrightarrow \left| i \right| \left| z - \frac{2 \cdot (-i)}{i \cdot (-i)} \right| = 4 \Leftrightarrow |z - (-2i)| = 4$ και επομένως ο Γ.Τ. των

σημείων $M(Z)$, είναι ο κύκλος με κέντρο το $K(-2i)$ και ακτίνα $\rho = 4$.

6. Αν για το μιγαδικό Z ισχύει $|z - i| = |\operatorname{Im}(z) + 1|$ να βρεθεί ο Γ.Τ. των σημείων $M(Z)$.

Λύση: $|z - i| = |\operatorname{Im}(z) + 1| \Leftrightarrow |x + yi - i| = |y + 1| \Leftrightarrow |x + (y - 1)i|^2 = |y + 1|^2 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = (y + 1)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow x^2 = 4y.$$

Αν θέσουμε $2p = 4$, δηλαδή $p = 2$,

τότε ο Γ.Τ. των σημείων $M(Z)$, είναι η **παραβολή** με εστία $E(0, 1)$ και διευθετούσα δ : $y = -1$.

7. Αν για τους μιγαδικούς z και w ισχύουν αντίστοιχα

$$|z - 2 - 4i| = |z - 6 + 4i| \text{ και } |w - 1 - i| = |w + 1 - 5i|, \text{ να βρεθεί το } \min |z - w|.$$

Λύση: Ομοίως με την άσκηση 4, βρίσκω τις εξισώσεις των ευθειών.

$$|z - 2 - 4i| = |z - 6 + 4i| \stackrel{z=x+yi}{\Leftrightarrow} x - 2y - 4 = 0 \text{ και } x, y \in \mathbb{R}$$

$$|w - 1 - i| = |w + 1 - 5i| \stackrel{w=x+yi}{\Leftrightarrow} |x + yi - 1 - i| = |x + yi + 1 - 5i| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |(x-1) + (y-1)i|^2 = |(x+1) + (y-5)i|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + (y-5)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 10y + 25 \Leftrightarrow 4x - 8y + 24 = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 6 = 0$$

Προφανώς οι Γ.Τ. των εικόνων των z και w ,

είναι αντίστοιχα, οι ευθείες $(\varepsilon): x - 2y - 4 = 0$ και $(\varepsilon'): x - 2y + 6 = 0$, με $\lambda_\varepsilon = \lambda_{\varepsilon'} = \frac{1}{2}$.

Επομένως το $\min |z - w|$, η **ελάχιστη** δηλαδή απόσταση ανάμεσα σε σημεία της (ε) και της (ε') , είναι η απόσταση των δύο παραλλήλων ευθειών, ή αλλιώς η απόσταση ενός σημείου της μιας από την άλλη.

$$\text{Έτσι } \min |z - w| = (AB) = d(A, \varepsilon') = \frac{|1 \cdot 4 - 2 \cdot 0 + 6|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

8. Αν για το μιγαδικό z ισχύει $(2z-1)^5 = (z-2)^5$, να δείξετε ότι η εικόνα του z ,

ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

Λύση: Πρέπει να προσέξουμε, ότι δε μας ζητάνε Γ. Τ., αλλά να δείξουμε ότι κάποιος Γ. Τ. είναι **φορέας** των εικόνων του z . Αφού ζητώ **υπερσύνολο λύσεων**, μπορώ να επεξεργαστώ τη σχέση με **συνεπαγωγή**.

$$(2z-1)^5 = (z-2)^5 \Rightarrow |(2z-1)^5| = |(z-2)^5| \Rightarrow |2z-1|^5 = |z-2|^5 \Rightarrow |2z-1| = |z-2| \Rightarrow |2z-1|^2 = |z-2|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2z-1)(\overline{2z-1}) = (z-2)(\overline{z-2}) \Rightarrow (2z-1)(2\bar{z}-1) = (z-2)(\bar{z}-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4z\bar{z} - 2\bar{z} - 2\bar{z} + 1 = z\bar{z} - 2\bar{z} - 2\bar{z} + 4 \Rightarrow 3z\bar{z} = 3 \Rightarrow z\bar{z} = 1 \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1$$

Αφού, αν ένας μιγαδικός z ικανοποιεί τη σχέση $(2z-1)^5 = (z-2)^5$, **τότε** ικανοποιεί και τη $|z|=1$,

άρα η **εικόνα του**, **ανήκει** στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

9. Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z-3| + |z+3| = 10$, να βρεθεί ο Γ.Τ. των σημείων $M(z)$.

Λύση: $|z-3| + |z+3| = 10 \Leftrightarrow |z-3| + |z-(-3)| = 10$, και συνεπώς οι μιγαδικοί αριθμοί z που ικανοποιούν

τη σχέση, έχουν εικόνες $M(z)$, των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα σημεία $E(3)$ και $E'(-3)$ είναι σταθερά ίσο με **10**. Έτσι, είναι φανερό, ότι ο ζητούμενος Γ.Τ. είναι **έλλειψη**, με εστίες $E(3)$, $E'(-3)$

και μεγάλο άξονα $2a=10$. Άρα η εξίσωση του Γ.Τ. είναι $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$. $\alpha = 5, \gamma = 3$ και $\beta = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

10. Αν για το μιγαδικό z ισχύει $||z-5i| - |z+5i|| = 6$ να βρεθεί ο Γ.Τ. των σημείων $M(z)$.

Λύση: $||z-5i| - |z+5i|| = 6 \Leftrightarrow ||z-5i| - |z-(-5i)|| = 6$, και συνεπώς οι μιγαδικοί αριθμοί z που ικανοποιούν

τη σχέση, έχουν εικόνες $M(z)$, των οποίων η «απόλυτη διαφορά» των αποστάσεων από τα σημεία $E(5i)$ και $E'(-5i)$ είναι σταθερά ίση με **6**. Έτσι, είναι φανερό, ότι ο ζητούμενος Γ.Τ. είναι **υπερβολή**, με εστίες

E, E' και κορυφές $A(3i)$ και $A'(-3i)$. Άρα η εξίσωση του Γ.Τ. είναι $\frac{y^2}{3^2} - \frac{x^2}{4^2} = 1$. $\alpha = 3, \gamma = 5$ και $\beta = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$