

Ερωτήσεις Κατανόησης στους Μιγαδικούς Αριθμούς, §2.1-§2.3

1. Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση:

(i) Αν στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών ισχύει $u^2 + v^2 = 0$, τότε :

A. $u = 0$

B. $v = 0$

Γ. $u = v = 0$

☒ Δ. Τίποτα από τα προηγούμενα.

Αιτιολόγηση: $1^2 + i^2 = 1 + (-1) = 0$

(ii) Ο αριθμός $z = (3+5i)^{10} + (3-5i)^{10}$ είναι:

A. Φανταστικός

B. Μηδέν

☒ Γ. Πραγματικός

Δ. Τίποτα από τα προηγούμενα.

Αιτιολόγηση: (Από την άσκηση 8 - σελίδα 96 του σχολικού βιβλίου, που μπορούμε να την χρησιμοποιούμε σα θεωρία)

$$\boxed{z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad z = -\bar{z} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}}$$

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \overline{(3+5i)^{10} + (3-5i)^{10}} = \overline{(3+5i)^{10}} + \overline{(3-5i)^{10}} = (\overline{3+5i})^{10} + (\overline{3-5i})^{10} = \\ &= (3-5i)^{10} + (3+5i)^{10} = (3+5i)^{10} + (3-5i)^{10} = z \Rightarrow \bar{z} = z \Rightarrow z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2. Ποιες από τις επόμενες ισότητες αληθεύουν για κάθε μιγαδικό z :

☒ A. $|z^2| = |z|^2$

☒ B. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

Γ. $z \cdot \bar{z} = z^2$

Δ. $z \cdot \bar{z} = |z|$

Ε. $|z^2| = z^2$.

Αιτιολόγηση: ☒ A. $|z^2| = |z \cdot z| = |z| \cdot |z| = |z|^2, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$

☒ B. $z \cdot \bar{z} = |z|^2, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$ Θεωρία σχ. βιβλίου, σελ. 97.

Γ. $z \cdot \bar{z} = z^2$. Για $z = i$, έχουμε: $z \cdot \bar{z} = i \cdot (-i) = -i^2 = -(-1) = 1 \neq -1 = i^2 = z^2$

και επομένως η $z \cdot \bar{z} = z^2$ **δεν ισχύει για κάθε** μιγαδικό z .

Επίσης: $z \cdot \bar{z} = z^2 \Leftrightarrow z^2 - z \cdot \bar{z} = 0 \Leftrightarrow z \cdot (z - \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ \text{ή} \\ z - \bar{z} = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ \text{ή} \\ z = \bar{z} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ \text{ή} \\ z \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

Δ. $z \cdot \bar{z} = |z|$. Για $z = 2$, έχουμε: $z \cdot \bar{z} = 2 \cdot 2 = 4 \neq 2 = |z|$ και επομένως

η $z \cdot \bar{z} = |z|$ **δεν ισχύει για κάθε** μιγαδικό z .

$$\text{Επίσης: } z \cdot \bar{z} = |z| \Leftrightarrow |z|^2 = |z| \Leftrightarrow |z|^2 - |z| = 0 \Leftrightarrow |z|(|z| - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |z| = 0 \\ \text{ή} \\ |z| - 1 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ \text{ή} \\ |z| = 1 \end{array} \right\}$$

Επομένως η σχέση ικανοποιείται, μόνο από τους μιγαδικούς που έχουν εικόνα την αρχή του μιγαδικού επιπέδου ή τα σημεία του κύκλου με κέντρο την αρχή και ακτίνα ένα.

$$\text{Ε. } |z^2| = z^2. \text{ Για } z = i, \text{ έχουμε: } |z^2| = |i^2| = |-1| = 1 \neq -1 = i^2 = z^2 \text{ και}$$

επομένως η $|z^2| = z^2$ **δεν ισχύει για κάθε** μιγαδικό z .

$$\text{Επίσης: } |z^2| = z^2 \Leftrightarrow |z|^2 = z^2 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = z^2 \Leftrightarrow z^2 - z \cdot \bar{z} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z \cdot (z - \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ \text{ή} \\ z - \bar{z} = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ \text{ή} \\ z = \bar{z} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ \text{ή} \\ z \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

3. Σύμφωνα με τη συνθήκη που ικανοποιούν οι μιγαδικοί z και αναφέρεται στην πρώτη στήλη, να τους αντιστοιχίσετε στην ευθεία της δεύτερης στήλης που ανήκει η εικόνα τους:

	Συνθήκη		Ευθεία
A.	$ z - i = z + i $	α.	$x = 1$
B.	$ z - 1 = z + 1 $	β.	yy'
Γ.	$ z - 1 = z - i $	γ.	$y = x$
		δ.	$y = -x$
Δ.	$ z + 1 = z + i $	ε.	$x'x$

Αντιστοίχιση: A. $|z - i| = |z + i| \rightarrow$ ε. $x'x$ Εξίσωση ευθείας $x'x'$: $y = 0$

$|z - i| = |z + i| \Leftrightarrow |z - i| = |z - (-i)|$ και επομένως η ζητούμενη ευθεία είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος των εικόνων των μιγαδικών $z_1 = i$ και $z_2 = -i$. Οι εικόνες των μιγαδικών αυτών, $M_1(z_1)$ και $M_2(z_2)$ στο μιγαδικό επίπεδο, είναι προφανώς σημεία του άξονα yy' (φανταστικός άξονας) συμμετρικά ως προς τον άξονα xx' και επομένως η ευθεία xx' είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος M_1M_2 .

$$\begin{aligned} |z - i| = |z + i| &\stackrel{z=x+yi}{\Leftrightarrow}_{x,y \in \mathbb{R}} |x + yi - i| = |x + yi + i| \Leftrightarrow |x + (y-1)i|^2 = |x + (y+1)i|^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = x^2 + (y+1)^2 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow 4y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Β. } |z-1|=|z+1| \rightarrow \beta. yy' \quad \boxed{\text{Εξίσωση ευθείας } yy': x=0}$$

$|z-1|=|z+1| \Leftrightarrow |z-1|=|z-(-1)|$ και επομένως η ζητούμενη ευθεία είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος των εικόνων των μιγαδικών $z_1=1$ και $z_2=-1$. Οι εικόνες των μιγαδικών αυτών, $M_1(z_1)$ και $M_2(z_2)$ στο μιγαδικό επίπεδο, είναι προφανώς σημεία του άξονα xx' (πραγματικός άξονας) συμμετρικά ως προς τον άξονα yy' και επομένως η ευθεία yy' είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος M_1M_2 .

$$\begin{aligned} |z-1|=|z+1| &\stackrel{z=x+yi}{\Leftrightarrow}_{x,y \in \mathbb{R}} |x+yi-1|=|x+yi+1| \Leftrightarrow |(x-1)+yi|^2=|(x+1)+yi|^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=(x+1)^2+y^2 \Leftrightarrow x^2-2x+1=x^2+2x+1 \Leftrightarrow 4x=0 \Leftrightarrow x=0 \end{aligned}$$

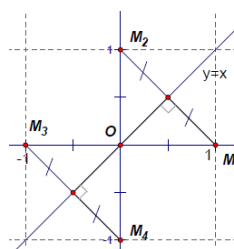
$$\text{Γ. } |z-1|=|z-i| \rightarrow \gamma. y=x$$

Η ζητούμενη ευθεία είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος M_1M_2 των εικόνων των μιγαδικών $z_1=1$ και $z_2=i$, και είναι η ευθεία $y=x$, αφού είναι διχοτόμος της γωνίας $M_1\hat{O}M_2$ του ισοσκελούς τριγώνου OM_1M_2 με βάση M_1M_2 .

$$\begin{aligned} |z-1|=|z-i| &\stackrel{z=x+yi}{\Leftrightarrow}_{x,y \in \mathbb{R}} |x+yi-1|=|x+yi-i| \Leftrightarrow |(x-1)+yi|^2=|x+(y-1)i|^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=x^2+(y-1)^2 \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2=x^2+y^2-2y+1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2y=2x \Leftrightarrow y=x \end{aligned}$$

$$\Delta. |z+1|=|z+i| \rightarrow \gamma. y=x$$

$$|z+1|=|z+i| \Leftrightarrow |z-(-1)|=|z-(-i)|$$



Η ζητούμενη ευθεία είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος M_3M_4 των εικόνων των μιγαδικών $z_3=-1$ και $z_4=-i$, και είναι η ευθεία $y=x$, αφού είναι διχοτόμος της γωνίας $M_3\hat{O}M_4$ του ισοσκελούς τριγώνου OM_3M_4 με βάση M_3M_4 .

$$\begin{aligned} |z+1|=|z+i| &\stackrel{z=x+yi}{\Leftrightarrow}_{x,y \in \mathbb{R}} |x+yi+1|=|x+yi+i| \Leftrightarrow |(x+1)+yi|^2=|x+(y+1)i|^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2+y^2=x^2+(y+1)^2 \Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2=x^2+y^2+2y+1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2y=2x \Leftrightarrow y=x \end{aligned}$$