

Απόλυτη Τιμή Πραγματικού Αριθμού

Ορισμός

Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού a συμβολίζεται με $|a|$ και ορίζεται από τον τύπο:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{αν } a \geq 0 \\ -a, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$$

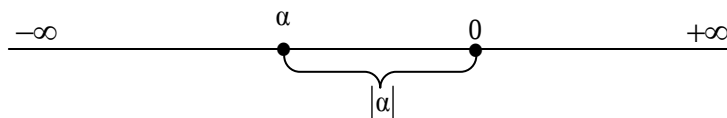
- Από τον παραπάνω ορισμό συμπεραίνουμε ότι η απόλυτη τιμή ενός μη αρνητικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός, ενώ η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του.

Παράδειγμα

Έχουμε

$$|0| = 0, \quad \left| \frac{5}{17} \right| = \frac{5}{17}, \quad |5 - \sqrt{23}| = 5 - \sqrt{23} \quad \text{και} \quad |-14| = -(-14) = 14$$

- Γεωμετρικά, η απόλυτη τιμή του a παριστάνει την απόσταση του αριθμού a από τον αριθμό 0.



Από τον παραπάνω ορισμό συμπεραίνουμε επίσης ότι:

- $|a| = |-a| \geq 0$
- $|a| \geq a$ και $|a| \geq -a$
- $|a|^2 = a^2$

και

- $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta \text{ ή } x = -\theta$ (εφόσον $\theta > 0$)
- $|x| = |a| \Leftrightarrow x = a \text{ ή } x = -a$

Παράδειγμα

Έχουμε:

$$\blacksquare \quad |x| = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \quad \text{ή} \quad x = -\sqrt{2}$$

$$\blacksquare \quad |2x-1| = |x+3| \Leftrightarrow 2x-1 = x+3 \quad \text{ή} \quad 2x-1 = -x-3$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \quad \text{ή} \quad 3x = -2 \Leftrightarrow x = 4 \quad \text{ή} \quad x = -\frac{2}{3}$$

Ιδιότητες των Απολύτων Τιμών

Πρόταση

Για τις απόλυτες τιμές ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

$$1. \quad |\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$$

$$2. \quad \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$$

$$3. \quad |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

Απόδειξη

1. Επειδή τα δύο μέλη της ισότητας είναι μη αρνητικά, διαδοχικά και ισοδύναμα έχουμε:

$$\begin{aligned} |\alpha \cdot \beta| &= |\alpha| \cdot |\beta| \Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta|^2 = (|\alpha| \cdot |\beta|)^2 \\ &\Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta|^2 = |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2 \\ &\Leftrightarrow (\alpha \cdot \beta)^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2 \quad \text{που ισχύει.} \end{aligned}$$

2. Επειδή τα δύο μέλη της ισότητας είναι μη αρνητικά, διαδοχικά και ισοδύναμα έχουμε:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| &= \frac{|\alpha|}{|\beta|} \Leftrightarrow \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|^2 = \left(\frac{|\alpha|}{|\beta|} \right)^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} = \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \quad \text{που ισχύει.} \end{aligned}$$

3. Επειδή τα δύο μέλη της σχέσης είναι μη αρνητικά, διαδοχικά και ισοδύναμα έχουμε:

$$\begin{aligned}
|\alpha + \beta| &\leq |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow |\alpha + \beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \\
&\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha| \cdot |\beta| \\
&\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2 + 2|\alpha\beta| \\
&\Leftrightarrow \alpha\beta \leq |\alpha\beta|, \text{ που ισχύει.}
\end{aligned}$$

- Με βάση την ιδιότητα **(1)** προκύπτει ότι $|\alpha^2| = |\alpha|^2$ και γενικά

$$|\alpha^v| = |\alpha|^v \text{ για κάθε } v \in \mathbb{N}^*.$$

- Επειδή

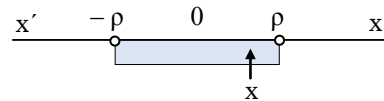
$$|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow |\alpha\beta| = \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha\beta \geq 0,$$

στην τελευταία ιδιότητα **(3)** η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

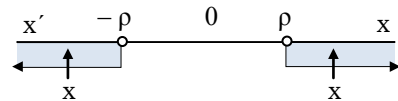
Πρόταση

Αν $\rho > 0$, τότε ισχύουν οι ισοδυναμίες:

- $|x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$



- $|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho \text{ ή } x > \rho$

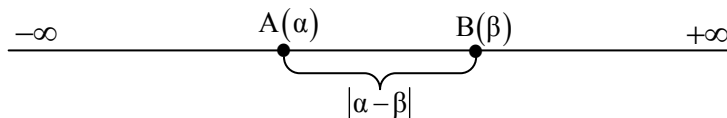


Απόσταση Δύο Αριθμών

- Έστω α, β δύο πραγματικοί αριθμοί οι οποίοι παριστάνονται στον άξονα από τα σημεία A, B αντίστοιχα. Το μήκος του τμήματος AB λέγεται **απόσταση** των αριθμών α και β , συμβολίζεται με $d(\alpha, \beta)$ και είναι ίση με $|\alpha - \beta|$. Δηλαδή,

$$d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|.$$

Στην περίπτωση που έχουμε $\alpha < \beta$, τότε η απόσταση $d(\alpha, \beta)$ είναι ίση με $\beta - \alpha$ και λέγεται **μήκος** του διαστήματος $[\alpha, \beta]$.



Παράδειγμα

Η απόσταση των αριθμών 7 και 12 είναι $d(7, 12) = |7 - 12| = |-5| = 5$

Λυμένες Ασκήσεις

1. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές:

i) $A = |-4| + |3| + |-2|$

ii) $B = |\sqrt{2} - 1| + |\sqrt{2} - 2|$

iii) $\Gamma = \|\pi - 3| - 1|$.

Λύση

i) Έχουμε:

• $-4 < 0$, άρα $|-4| = -(-4) = 4$

• $3 > 0$, άρα $|3| = 3$

• $-2 < 0$, άρα $|-2| = -(-2) = 2$

Επομένως,

$$A = |-4| + |3| + |-2| = 4 + 3 + 2 = 9.$$

Σημείωση

Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού a συμβολίζεται με $|a|$ και ορίζεται από τον τύπο

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{αν } a \geq 0 \\ -a, & \text{αν } a < 0. \end{cases}$$

ii) Γνωρίζουμε ότι

$$1 < \sqrt{2} < 2, \text{ δηλαδή } \sqrt{2} > 1 \text{ και } \sqrt{2} < 2.$$

Οπότε:

• $\sqrt{2} - 1 > 0$ άρα $|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$

• $\sqrt{2} - 2 < 0$ άρα $|\sqrt{2} - 2| = -(\sqrt{2} - 2) = -\sqrt{2} + 2$

Επομένως,

$$B = |\sqrt{2} - 1| + |\sqrt{2} - 2| = (\sqrt{2} - 1) + (-\sqrt{2} + 2) = \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} + 2 = 1.$$

iii) Γνωρίζουμε ότι $\pi \simeq 3,14$. Οπότε $3 < \pi < 4$, δηλαδή $\pi > 3$ και $\pi < 4$. Άρα,

$$\pi - 3 > 0$$

και συνεπώς

$$|\pi - 3| = \pi - 3.$$

Είναι λοιπόν

$$|\pi - 3| - 1 = \pi - 3 - 1 = \pi - 4 < 0.$$

Επομένως,

$$\|\pi - 3| - 1| = |\pi - 4| = -(\pi - 4) = -\pi + 4.$$

2. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει

$$1 < x < 2,$$

να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής την παράσταση

$$A = |x-1| + |x-2| + |x-3|.$$

Λύση

Έχουμε

$$1 < x < 2.$$

Οπότε:

- $x-1 > 0$ και συνεπώς $|x-1| = x-1$
- $x-2 < 0$ και συνεπώς $|x-2| = -(x-2) = -x+2$
- $x-3 < 0$ και συνεπώς $|x-3| = -(x-3) = -x+3$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} A &= |x-1| + |x-2| + |x-3| = (x-1) + (-x+2) + (-x+3) \\ &= x-1-x+2-x+3 = 4-x. \end{aligned}$$

Μεθοδολογία

Για να γράψουμε μία παράσταση χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής, αρκεί να βρούμε το πρόσημο της παράστασης μέσα σε κάθε απόλυτη τιμή και να αξιοποιήσουμε στη συνέχεια τον ορισμό της.

3. Να αποδείξετε ότι

$$||x|-2| = x+2 \text{ για κάθε } x \in [-2, 0].$$

Λύση

Έχουμε

$$x \in [-2, 0].$$

Δηλαδή,

$$-2 \leq x \leq 0.$$

Από τη σχέση

$$x \leq 0$$

προκύπτει ότι

$$|x| = -x$$

και συνεπώς

$$||x|-2| = |-x-2|.$$

Σχόλιο

Είναι φανερό ότι πρέπει να απαλλαγούμε από το σύμβολο της απόλυτης τιμής, το οποίο μάλιστα εμφανίζεται δύο φορές. Αρχικά, εστιάζουμε στην παράσταση $|x|$ και αξιοποιούμε τη σχέση

$$x \leq 0.$$

Επίσης, από τη σχέση

$$-2 \leq x$$

προκύπτει ότι

$$-2 - x \leq 0 \Leftrightarrow -x - 2 \leq 0$$

οπότε

$$|-x - 2| = -(-x - 2) = x + 2.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$||x| - 2| = x + 2 \text{ για κάθε } x \in [-2, 0].$$

4. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $A = |x - 3| - |3 - x|$

ii) $B = ||x| - x| - ||x| + x|$

iii) $\Gamma = |x + 4|^2 - 8x.$

Λύση

i) Έχουμε

$$3 - x = -(x - 3) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Οπότε

$$|3 - x| = |-(x - 3)| = |x - 3|.$$

Επομένως,

$$A = 0.$$

ii) Γνωρίζουμε ότι

$$|x| \geq x \text{ και } |x| \geq -x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή

$$|x| - x \geq 0 \text{ και } |x| + x \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} B &= ||x| - x| - ||x| + x| = |x| - x - (|x| + x) \\ &= |x| - x - |x| - x = -2x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

iii) Έχουμε

$$|x + 4|^2 = (x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \Gamma &= |x + 4|^2 - 8x = x^2 + 8x + 16 - 8x \\ &= x^2 + 16 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Σημείωση

Για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύουν οι σχέσεις:

- $|a| = |-a| \geq 0$

- $|a| \geq a$ και $|a| \geq -a$

- $|a|^2 = a^2.$

5. Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής κάθε μία από τις παραστάσεις:

i) $\left| x^2 - 4x + 4 \right|$

ii) $\left| 4x - (x+1)^2 \right|$

iii) $\left| x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \right|$

iv) $\left| |x| - x \right|$.

Λύση

i) Έχουμε

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Οπότε

$$\left| x^2 - 4x + 4 \right| = x^2 - 4x + 4.$$

ii) Έχουμε

$$\begin{aligned} 4x - (x+1)^2 &= 4x - (x^2 + 2x + 1) = 4x - x^2 - 2x - 1 \\ &= -x^2 + 2x - 1 = -(x^2 - 2x + 1) \\ &= -(x-1)^2 \leq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Οπότε

$$\left| 4x - (x+1)^2 \right| = -\left(4x - (x+1)^2 \right) = -4x + (x+1)^2.$$

iii) Έχουμε

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = \frac{x^4 + 1 - 2x^2}{x^2} = \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2} \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

Οπότε

$$\left| x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \right| = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

iv) Γνωρίζουμε ότι

$$|x| \geq x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

δηλαδή

$$|x| - x \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως,

$$\left| |x| - x \right| = |x| - x = \begin{cases} x - x, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x - x, & \text{αν } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0. \end{cases}$$

6. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\text{i)} \quad A = \frac{|x-y| - |y-x|}{|x-y| + |y-x|} \qquad \text{ii)} \quad B = \frac{|x-2|}{|2-x|} + \frac{|y-5|}{|5-y|} + \frac{|\omega-7|}{|7-\omega|}.$$

Λύση

i) Έχουμε

$$\begin{aligned} A &= \frac{|x-y| - |y-x|}{|x-y| + |y-x|} = \frac{|x-y| - |-(x-y)|}{|x-y| + |-(x-y)|} \\ &= \frac{|x-y| - |x-y|}{|x-y| + |x-y|} = \frac{0}{2|x-y|} = 0. \end{aligned}$$

ii) Έχουμε

$$\begin{aligned} B &= \frac{|x-2|}{|2-x|} + \frac{|y-5|}{|5-y|} + \frac{|\omega-7|}{|7-\omega|} \\ &= \frac{|x-2|}{|-(x-2)|} + \frac{|y-5|}{|-(y-5)|} + \frac{|\omega-7|}{|-(\omega-7)|} \\ &= \frac{|x-2|}{|x-2|} + \frac{|y-5|}{|y-5|} + \frac{|\omega-7|}{|\omega-7|} \\ &= 1+1+1=3. \end{aligned}$$

Σχόλιο

Οι αριθμοί $x-y$ και $y-x$ είναι αντίθετοι αφού
 $y-x = -(x-y)$
 οπότε έχουν την ίδια απόλυτη τιμή.

7. Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής την παράσταση

$$A = |x-4| + 2x - 3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Λύση

- Αν $x < 4 \Leftrightarrow x-4 < 0$,

τότε

$$|x-4| = -(x-4) = -x+4.$$

Επομένως,

$$A = -x+4+2x-3 = x+1.$$

Μεθοδολογία

Για να απαλλαγούμε από το σύμβολο της απόλυτης τιμής, αρκεί να βρούμε το πρόσημο της παράστασης $x-4$ που βρίσκεται μέσα στην απόλυτη τιμή. Για το σκοπό αυτό συγκρίνουμε το x με το 4.