

1 Θέμα 2 – 1300

α. Να αποδείξετε ότι $x^2 + 4x + 5 > 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .

β. Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:

$$B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4|$$

2 Θέμα 2 – 1258

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

α. να γράψετε τις παραστάσεις $|x - 5|$ και $|x - 10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

β. να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{|x - 5|}{x - 5} + \frac{|x - 10|}{x - 10}$.

3 Θέμα 2 – 13177

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $2 \leq \alpha \leq 3$ και $-2 \leq \beta \leq -1$.

α. Να δείξετε ότι: $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$ και $|\beta + 2| = \beta + 2$.

β. Να δείξετε ότι: $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$.

γ. Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2|$ είναι ίση με 1.

4 Θέμα 2 – 13169

Αν γνωρίζουμε ότι ο x είναι πραγματικός αριθμός με $3 \leq x \leq 5$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $x - 5 \leq 0 < x - 2$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| - |x - 5| = 2$.

5 Θέμα 2 – 1239

Δίνεται η παράσταση: $A = |3x - 6| + 2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι

i. για κάθε $x \geq 2$, $A = 3x - 4$

ii. για κάθε $x < 2$, $A = 8 - 3x$.

β. Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι: $\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4$

6 Θέμα 2 – 1260

Δίνεται η παράσταση: $A = |x - 1| - |x - 2|$.

α. Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι: $A = 2x - 3$.

β. Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.

7 Θέμα 2 – 1384

Δίνεται η παράσταση: $A = |x - 1| + |y - 3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$. Να αποδείξετε ότι:

α. $A = x - y + 2$

β. $0 < A < 4$

8 Θέμα 2 – 1303

Δίνονται οι παραστάσεις:

$A = |2x - 4|$ και $B = |x - 3|$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

- α.** Για κάθε $2 \leq x < 3$ να αποδείξετε ότι $A + B = x - 1$.
- β.** Υπάρχει $x \in [2, 3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

9 Θέμα 2 – 12909

Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $|x - 3| < 5$.

- α.** Να δείξετε ότι $x \in (-2, 8)$.
- β.** Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x - 3| < 5$.
- γ.** Αν A το σύνολο που έχει στοιχεία τις ακέραιες τιμές του x που βρήκατε στο **β.** ερώτημα και B το σύνολο με $B = \{-3, -2, -1, 0, 3, 4\}$, να παραστήσετε τα σύνολα $A \cup B$ και $A \cap B$ με αναγραφή των στοιχείων τους.

10 Θέμα 2 – 1272

Δίνεται πραγματικός αριθμός x , για τον οποίο ισχύει: $d(x, -2) < 1$. Να δείξετε ότι:

- a.** $-3 < x < -1$

11 Θέμα 2 – 1253

- α.** Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 5| < 4$.
- β.** Αν κάποιος αριθμός α επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση, να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{9} < \frac{1}{\alpha} < 1$.

12 Θέμα 2 – 1322

Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x - 2| < 3$.

- α.** Να αποδείξετε ότι: $-1 < x < 5$.
- β.** Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|x+1| + |x-5|}{3}$.

13 Θέμα 2 – 1323

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y , για τους οποίους ισχύει: $|y-2| < 1$.

- α.** Να αποδείξετε ότι: $y \in (1, 3)$.
- β.** Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|y-1| + |y-3|}{2}$.

14 Θέμα 2 – 1284

- α.** Να λύσετε την ανίσωση $|x+4| \geq 3$.
- β.** Αν $\alpha \geq -1$, να γράψετε την παράσταση $A = ||\alpha+4|-3|$ χωρίς απόλυτες τιμές.
Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

15 Θέμα 2 – 1342

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x-1| < 1$, τότε:

- α.** Να αποδείξετε ότι $0 < x < 1$.
- β.** Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:
 $1, x, x^2$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

16 Θέμα 2 – 1320

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3) = 3 - 2x$.

- α. Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$.
- β. Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x - 3| - 2|3 - x|$ είναι ανεξάρτητη του x .

17 Θέμα 2 – 1366

- α. Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$.
- β. Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι: $|\alpha| + \left| \frac{1}{\alpha} \right| \geq 2$.

18 Θέμα 2 – 1371

- α. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να αποδειχθεί ότι: $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \geq 2$ (1).
- β. Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

19 Θέμα 2 – 1252

- α. Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y - 3| < 1$.
- β. Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να αποδείξετε ότι: $6 < \Pi < 14$, όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου.

20 Θέμα 2 – 1248

- α. Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y - 3| < 1$.
- β. Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου.

21 Θέμα 2 – 1268

Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y , για τα οποία ισχύουν:

$$|x - 3| \leq 2 \text{ και } |y - 6| \leq 4$$

- α. Να δείξετε ότι: $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$.
- β. Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y .

22 Θέμα 4 – 1515

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση:

$$(\alpha - 1)(1 - \beta) > 0$$

- α. Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α, β .
- β. Αν επιπλέον $|\beta - \alpha| = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = |\alpha - 1| + |1 - \beta|$.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε γεωμετρικά είτε αλγεβρικά.

23 Θέμα 4 – 1429

Σε έναν άξονα τα σημεία A , B και M αντιστοιχούν στους αριθμούς 5 , 9 και x αντίστοιχα.

- α.** Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x - 5|$ και $|x - 9|$.
- β.** Αν ισχύει $|x - 5| = |x - 9|$, παραστάσεων
 - i.** Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 - ii.** Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο M . Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

24 Θέμα 4 – 1427

Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x, 5) \leq 9$.

- α.** Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά.
- β.** Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x .
- γ.** Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος **β**.
- δ.** Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος **γ** για να δείξετε ότι: $|x + 4| + |x - 14| = 18$.

25 Θέμα 4 – 1428

Δίνονται τα σημεία A , B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2 , 7 και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

- α.** Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.
 - i.** $|x + 2|$
 - ii.** $|x - 7|$
- β.** Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος:

$$|x + 2| + |x - 7|$$
- γ.** Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |x + 2| + |x - 7|$ γεωμετρικά.
- δ.** Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

26 Θέμα 4 – 13179

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α , β για τους οποίους ισχύει $1 \leq \beta \leq 2$ και $2 \leq \alpha \leq 4$.

- α. i.** Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3 .
- ii.** Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο **i.** ερώτημα.
- β. i.** Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \leq \frac{\alpha}{\beta}$.
- ii.** Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει $\left| 1 - \frac{\beta}{\alpha} \right| = \left| \frac{\alpha}{\beta} - 1 \right|$.